

doi <https://doi.org/10.18265/2447-9187a2025id8997>
ARTIGO ORIGINAL

SUBMETIDO 11/04/2025

APROVADO 22/07/2025


PUBLICADO ON-LINE 31/07/2025

VERSÃO FINAL DIAGRAMADA 27/04/2026

EDITOR ASSOCIADO
Dr. Andre Luis Christoforo

Modelagem numérica de fundações profundas isoladas sob carga transversal em solos com módulo de reação constante ou variável

 Albert Willian Faria ^[1] *

 Paulo Roberto Garcia ^[2]

[1] albert.faria@uftm.edu.br

[2] paulo.garcia@uftm.edu.br

Instituto de Ciências Tecnológicas e Exatas (ICTE), Universidade Federal do Triângulo Mineiro (UFTM), Uberaba, Minas Gerais, Brasil

* Autor para correspondência.

RESUMO: Este estudo apresenta uma análise comparativa entre as formulações analíticas de Hetényi (1946) e Miche (1930) e uma abordagem numérica utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF), com o objetivo de avaliar o comportamento de fundações profundas e longas submetidas a ações horizontais aplicadas no topo incluindo força horizontal e/ou momento fletor. A motivação para este trabalho reside nas limitações das soluções analíticas para representar adequadamente a variabilidade do solo, particularmente em casos que envolvem geometrias complexas ou condições de contorno mais realistas, para as quais os métodos numéricos oferecem maior flexibilidade e precisão. Foram consideradas duas distribuições do módulo de reação horizontal do subleito (K_h), que caracterizam a interação solo-estrutura: uma constante e outra linearmente variável com a profundidade. A fundação foi modelada como uma viga de Euler-Bernoulli, e a interação solo-estrutura foi representada por molas horizontais segundo o modelo de Winkler. O modelo numérico foi implementado tanto no ambiente de programação Python quanto no software ANSYS APDL. Deslocamentos horizontais, rotações e esforços internos (momento fletor - M e força cortante - V) foram obtidos ao longo do fuste da fundação. Dois casos são analisados: (i) uma estaca longa em solo com K_h constante e (ii) um caixão longo em solo com K_h variando linearmente com a profundidade. Os resultados do MEF obtidos em Python foram comparados com as soluções analíticas de Hetényi e Miche (formulação simplificada), com resultados numéricos do ANSYS APDL e com dados da literatura, demonstrando boa concordância e validando a abordagem numérica proposta. A validação foi reforçada por meio de comparações quantitativas, análise de convergência e consistência física dos resultados. Os modelos numéricos implementados mostraram-se adequados para estimar deslocamentos horizontais, distribuições de forças internas (M e V), rotações e identificar a localização e a magnitude do momento fletor máximo ao longo do fuste da fundação, parâmetros essenciais para o projeto de fundações profundas.

Palavras-chave: elementos finitos; fundações profundas; modelo de Hetényi; modelo de Miche; módulo de reação do subleito horizontal.



Numerical modeling of isolated deep foundations under transversal load in soils with constant or variable reaction modulus

ABSTRACT: *This study presents a comparative analysis between the analytical formulations proposed by Hetényi (1946) and Miche (1930), and a numerical approach based on the Finite Element Method (FEM), aiming to assess the behavior of long deep foundations subjected to horizontal actions applied at the top, including horizontal force and/or bending moment. The motivation for this work lies in the limitations of analytical solutions to adequately represent soil variability, particularly in cases involving complex geometries or more realistic boundary conditions, where numerical methods offer greater flexibility and accuracy. Two distributions of the horizontal subgrade reaction modulus (K_h), which characterizes soil-structure interaction, were considered: one constant and one linearly variable with depth. The foundation was modeled as an Euler-Bernoulli beam, and the soil-structure interaction was represented by horizontal springs according to the Winkler model. The numerical model was implemented both in the Python programming environment and in the ANSYS APDL software. Horizontal displacements, rotations, and internal forces (bending moment – M and shear force – V) were obtained along the foundation shaft. Two cases were analyzed: (i) a long pile in soil with constant K_h ; and (ii) a long caisson in soil with K_h linearly varying with depth. The FEM results obtained in Python were compared with the analytical solutions of Hetényi and Miche (simplified formulation), with numerical results from ANSYS APDL, and with data from the literature, demonstrating good agreement and validating the proposed numerical approach. Validation was reinforced through quantitative comparisons, convergence analysis, and the physical consistency of the results. The implemented numerical models proved suitable for estimating horizontal displacements, internal force distributions (M and V), rotations, and identifying the location and magnitude of the maximum bending moment along the foundation shaft, parameters that are essential for the design of deep foundations.*

Keywords: *deep foundations; finite elements; Hetényi model; horizontal subgrade reaction modulus; Miche model.*

Nomenclatura

Variável	Nome	Unidade
u	Deslocamento horizontal da estaca	m
θ	Inclinação (rotação) da estaca	rad
M	Momento fletor interno	kN·m
V	Esforço cortante interno	kN
H	Carga horizontal aplicada no topo da estaca	kN
M_p	Momento fletor aplicado no topo	kN·m
E_p	Módulo de elasticidade do material da estaca	kPa ou MPa
I_p	Momento de inércia da seção transversal da estaca	m ⁴
z	Profundidade ao longo do fuste da fundação	m
L	Comprimento do elemento finito	m
L_p	Comprimento total da estaca	m
B	Largura (ou diâmetro) da estaca	m
K_h	Módulo de reação horizontal do solo	kN/m ²
k_h	Coefficiente de reação horizontal do solo	kN/m ³
n_h	Taxa de crescimento do coeficiente de reação com a profundidade	kN/m ³
m_h	Taxa de crescimento normalizada do coeficiente de reação	kN/m ⁴
k_s	Rigidez da mola equivalente em cada nó	kN/m
λ	Parâmetro adimensional da fundação longa (Hetényi)	m ⁻¹
T	Rigidez relativa estaca-solo (Miche)	m
u_o	Deslocamento horizontal no topo da estaca	m
M_{max}	Momento fletor máximo ao longo do fuste	kN·m

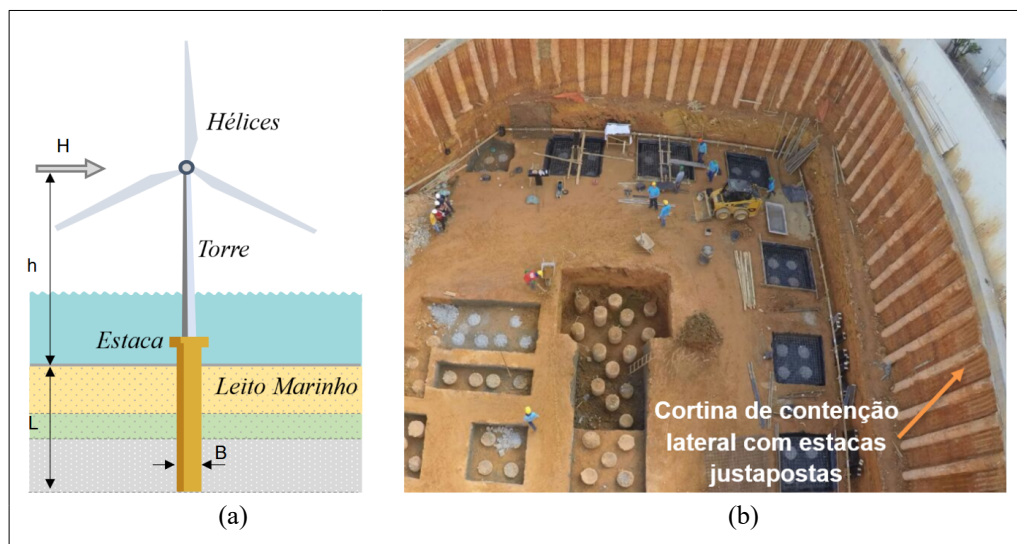
1 Introdução

Estruturas como pontes, viadutos, edifícios de grande porte, turbinas eólicas (Figura 1a), reservatórios elevados e sistemas de contenção (Figura 1b), que transmitem grandes cargas verticais e momentos ao solo e/ou à rocha, fazem uso frequente de fundações profundas. Entre essas, destacam-se as estacas isoladas de grande diâmetro, que se configuram como soluções particularmente eficientes e amplamente empregadas, sobretudo em projetos *offshore*, em virtude de sua capacidade de resistir a cargas combinadas e momentos fletores.

Figura 1 ▶

Estaca isolada sujeita a carga horizontal H aplicada a uma altura h da superfície marinha (*ground surface*) (a). Cortina de contenção lateral por estacas escavadas justapostas de concreto (b).

Fonte: (a) adaptado de Hu et al. (2022). (b) adaptado de APL Engenharia (2020)



Dentre as diversas aplicações das fundações profundas, destaca-se a utilização de estacas isoladas de grande diâmetro como solução eficiente, sobretudo em estruturas do tipo *offshore*, para resistir a cargas combinadas a momentos fletores, conforme demonstrado em estudos recentes (Díaz; Soares, 2020; Jindal et al., 2024; Ma et al., 2022; Sun et al., 2024).

O custo das fundações em estruturas *offshore*, como turbinas eólicas instaladas em alto-mar (Figura 1a), pode representar entre 25% e 34% do custo total do projeto, variando conforme a profundidade e as características do solo oceânico (Díaz; Soares, 2020). Assim, as fundações profundas tornam-se o elemento estrutural mais crítico na viabilidade dessas implementações.

Nesse contexto, a análise do comportamento lateral de estacas isoladas submetidas a carregamentos horizontais no topo tem sido objeto de diversas pesquisas nacionais e internacionais, com o intuito de compreender a interação solo-estrutura sob tais ações. Estudos recentes (Barbosa et al., 2023; Hu et al., 2022; Jindal et al., 2024; Rani, 2013; Rosendo, 2020; Rosendo; Albuquerque, 2021; Wang et al., 2023) têm investigado os efeitos da interação solo-fundação profunda nos deslocamentos e no desempenho estrutural, influenciando diretamente o custo da fundação.

A literatura também destaca a relevância de comparações entre abordagens analíticas e numéricas aplicadas à modelagem de fundações profundas submetidas a cargas transversais no topo, bem como sua validação com dados experimentais. Essas comparações permitem avaliar as limitações e as vantagens de cada metodologia, contribuindo para o aprimoramento dos modelos adotados no dimensionamento (Rani, 2013; Christan; Puppi, 2015).

Adicionalmente, estudos recentes têm evidenciado o impacto da interação solo-fundação sobre o desempenho global de edifícios altos com lajes protendidas, indicando que a consideração dessa interação pode resultar em variações nos deslocamentos horizontais e nos parâmetros de estabilidade, com implicações diretas no atendimento às exigências normativas (Alves; Fiorotti; Carvalho Júnior, 2021). Pesquisas focadas em blocos sobre estacas também demonstram que a interação solo-estrutura pode alterar de forma significativa os esforços internos, os deslocamentos e a distribuição de cargas entre as estacas e o solo, reforçando a relevância da consideração integrada da fundação no comportamento estrutural global (Souza; Delalibera, 2024).

Entre os fatores mais relevantes, destaca-se a influência do tipo de distribuição da rigidez do solo, comumente considerada constante ou linearmente variável com a profundidade, sobre os deslocamentos, momentos fletores e esforços cortantes ao longo da estaca.

A formulação clássica proposta por Hetényi (1946), baseada na teoria da viga sobre fundação elástica, ainda constitui a base de diversos estudos analíticos, numéricos e experimentais relacionados à modelagem de fundações profundas submetidas a carregamentos laterais, em razão de sua simplicidade. Paralelamente, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem sido amplamente empregado na representação do comportamento de fundações profundas sob ações horizontais, conforme demonstrado em trabalhos recentes (Abushama *et al.*, 2024; Braun *et al.*, 2024; Foursoff, 2018; Hu *et al.*, 2022; Rosendo, 2020; Zhang; Li, 2024).

Diante desse panorama, o presente trabalho tem como objetivo modelar o comportamento de fundações profundas isoladas submetidas a carregamentos transversais no topo, considerando duas hipóteses para o módulo de reação do solo: constante e linearmente variável com a profundidade. Para isso, utilizam-se as formulações analíticas clássicas de Hetényi (1946) e Miche (1930), além da modelagem numérica pelo MEF.

O modelo numérico é implementado no ambiente de programação Python. Os resultados obtidos, como o deslocamento horizontal e a inclinação no topo, bem como os esforços internos (momento fletor e esforço cortante) ao longo do fuste (área lateral) das fundações, são comparados com os resultados das abordagens analítica e numérica.

Além da formulação e validação frente a modelos analíticos clássicos da literatura, o estudo busca também demonstrar a robustez do MEF na modelagem e solução de problemas envolvendo estacas submetidas a carregamentos horizontais no topo. O MEF revela-se atualmente uma ferramenta acessível, em virtude da popularização dos microcomputadores, da ampla disponibilidade de materiais didáticos gratuitos, de ambientes de programação de código aberto (como Python e Octave) e, mais recentemente, do avanço da inteligência artificial (IA). Sua versatilidade torna-o aplicável a diferentes cenários de interação solo-fundação, como se pretende demonstrar neste trabalho.

Nas seções seguintes, são apresentados os fundamentos teóricos e metodológicos do estudo. Inicialmente, apresenta-se o modelo de Winkler aplicado à interação solo-fundação (Seção 2), seguido da formulação da equação diferencial governante do problema (Seção 3). Na sequência, descreve-se a metodologia adotada para o desenvolvimento das análises (Seção 4). Posteriormente, são apresentados os resultados obtidos para os modelos com módulo de reação horizontal constante e linearmente variável com a profundidade, seguidos da análise e discussão dos efeitos observados (Seção 5). Por fim, são expostas as considerações finais, nas quais se destacam as principais conclusões e contribuições deste estudo (Seção 6).

2 Modelo de Winkler aplicado ao estudo da interação solo-fundação

O modelo mais simplificado e amplamente utilizado para representar o comportamento do solo é o modelo de Winkler, no qual o meio de apoio é idealizado como um conjunto de molas independentes, dispostas ao longo do comprimento da fundação. Cada mola apresenta comportamento elástico-linear, e a reação do solo é proporcional ao deslocamento da estrutura. Nesse modelo, o solo é caracterizado unicamente por um parâmetro de rigidez denominado k , que representa a constante elástica da mola.

Apesar de sua simplicidade, o modelo de Winkler tem sido empregado com sucesso em diversas situações práticas da engenharia geotécnica, especialmente em análises envolvendo fundações profundas. Um exemplo clássico de aplicação é a modelagem de estacas submetidas a carregamentos horizontais, em que a estaca é representada como uma viga e o solo como molas distribuídas ao longo de seu comprimento.

Contudo, trata-se de uma aproximação do comportamento real do solo, pois desconsidera a continuidade do meio, os efeitos de coesão e a interação entre os elementos do solo. Ainda assim, sua formulação matemática relativamente simples possibilita soluções analíticas e numéricas com resultados satisfatórios em determinados contextos.

No dimensionamento de fundações profundas submetidas a ações horizontais, a determinação dos esforços internos e dos deslocamentos baseia-se geralmente na teoria da reação horizontal do solo. O módulo de reação horizontal do solo (K_h), com dimensão (F/L^2), é definido como a razão entre a força de reação horizontal (F) e o deslocamento horizontal (u) da estaca:

$$K_h = \frac{F}{u} \quad (1)$$

Outro parâmetro comumente utilizado para representar o comportamento mecânico do solo frente à ação horizontal é o coeficiente de reação horizontal (k_h), com dimensão (F/L^3), definido como a razão entre a pressão do solo (p) e o deslocamento horizontal (u). Esse coeficiente pode ser expresso por:

$$k_h = \frac{p}{u} = \frac{n_h \cdot z}{d} \quad (2)$$

É fundamental distinguir os parâmetros relacionados à reação horizontal do solo, pois, embora correlatos, apresentam definições e aplicações distintas. O módulo de reação horizontal k_h representa a rigidez global do solo frente ao deslocamento horizontal da fundação, sendo definido como uma relação força-deslocamento com dimensão de força por área (F/L^2). Esse parâmetro é amplamente utilizado em modelagens simplificadas, nas quais o solo é representado por molas linearizadas.

Por outro lado, o coeficiente de reação horizontal k_h refere-se à rigidez por unidade de comprimento da fundação, com dimensão de força por volume (F/L^3), sendo empregado para descrever a variação da pressão do solo ao longo da profundidade em análises mais detalhadas, como aquelas que consideram a distribuição da reação ao longo do fuste da estaca. Os coeficientes adimensionais n_h e m_h , por sua vez, são parâmetros empíricos ou derivados, utilizados para caracterizar a resposta do solo em diferentes profundidades ou condições, ajustando modelos analíticos ou numéricos às características específicas do solo e do sistema fundação-solo.

Conforme a Equação 2, o coeficiente k_h pode ser expresso a partir da constante de reação horizontal n_h , ou taxa de crescimento do coeficiente com a profundidade z , com dimensão (F/L^3).

As Equações 1 e 2 podem ser relacionadas por meio da expressão:

$$K_h = k_h \cdot d \quad (3)$$

visto que $F = p \cdot d$.

Alguns autores utilizam m_h no lugar de n_h para representar a taxa de crescimento do coeficiente de reação horizontal com a profundidade, sendo que:

$$m_h = \frac{n_h}{d}, \text{ dimensão } (F / L^4) \quad (4)$$

de modo que $k_h = m_h \cdot z$

Em geral, o módulo de reação horizontal do solo (K_h) pode ser determinado experimentalmente, conforme apresentado por Kassouf (2012), ou estimado com base em valores típicos disponíveis em tabelas de correlação segundo o tipo de solo. Também pode ser obtido por meio de equações empíricas aproximadas, como as propostas por Terzaghi (1955), Vesic (1961), Broms (1964), Davisson (1970 *apud* Velloso; Lopes, 2011), e Das e Sivakugan (2022).

As expressões matemáticas para o cálculo de K_h dependem de parâmetros relacionados à geometria da fundação profunda (como o momento de inércia da seção transversal e o diâmetro ou largura da fundação), ao tipo de solo e aos seus índices físicos e mecânicos, tais como: resistência não drenada (S_u), módulo de deformabilidade (E_s), módulo secante (E_{s0}), índice de resistência à penetração ($NSPT$), coeficiente de Poisson, entre outros.

Segundo Terzaghi (1955), a hipótese de módulo de reação horizontal K_h constante com a profundidade é válida para solos homogêneos de argilas rígidas ou pré-adensadas, nos quais se admite que a rigidez lateral do solo se mantém uniforme ao longo do fuste da estaca. Por outro lado, a hipótese de K_h linearmente crescente com a profundidade é mais adequada a perfis homogêneos de solos arenosos ou argilas moles normalmente adensadas.

Na prática, o comportamento mecânico do solo em contato com a fundação pode ser bastante complexo. O módulo de reação pode variar de forma não linear com a profundidade, influenciado por fatores como a estratigrafia, o grau de adensamento ou compactação, a presença de camadas intermediárias, a umidade, entre outros. Para representar esse comportamento, podem ser utilizados modelos com variação parabólica ou quadrática da rigidez, os quais descrevem o aumento não linear da reação do solo com a profundidade. Tais modelos são adequados para solos com transições graduais de propriedades (Das; Sivakugan, 2022).

Além disso, os modelos baseados em curvas p - y , que relacionam a pressão de reação do solo (p) ao deslocamento lateral da fundação (y), têm se destacado nas análises de carregamentos laterais por incorporarem a não linearidade do comportamento do solo. Essas curvas foram originalmente desenvolvidas por Reese, Cox e Koop (1974) e posteriormente aprimoradas pelo Instituto Americano de Petróleo (API, 2007) e por Hu *et al.* (2022).

Modelos multicamadas do tipo Winkler também têm sido utilizados para representar solos estratificados, atribuindo-se diferentes rigidezes a cada camada do perfil geotécnico. Por fim, os modelos numéricos baseados no MEF permitem uma representação contínua do solo por meio de leis constitutivas específicas, possibilitando análises mais realistas da interação solo-estrutura. Esse método viabiliza a consideração de efeitos não lineares, heterogeneidade do solo, modelagens tridimensionais com materiais elasto-plásticos, além de condições reais de carregamento e geometria.

Apesar da variedade de formulações disponíveis na literatura, as aproximações propostas por Terzaghi (1955), que consideram K_h constante ou linearmente variável com a profundidade, mostram-se úteis e adequadas em diversos casos práticos. Tais

abordagens, adotadas no presente trabalho, são particularmente vantajosas em projetos preliminares ou em análises comparativas.

3 Equação diferencial governante da interação solo-fundação

A equação diferencial ordinária que descreve o comportamento de estacas submetidas a carregamento horizontal aplicado no topo e à flexão, inseridas em solo elástico-linear, é baseada na hipótese de Winkler para a reação do solo. Considerando a fundação profunda como uma viga de Euler-Bernoulli, a equação é expressa por:

$$E_p \cdot I_p \cdot D_z^4 \cdot u + K_h \cdot u = 0 \quad (5)$$

onde: $E_p \cdot I_p$ é a rigidez à flexão da fundação profunda, sendo o produto do módulo de Young E_p pelo momento de inércia I_p ; $u(z)$ representa o deslocamento lateral da estaca em função da profundidade z ; K_h é o módulo de reação horizontal do solo.

Neste trabalho, D_z refere-se à derivada em relação à profundidade z , ou seja, $D_z = d/dz$, e a notação D_z^n indica a derivada de ordem n com respeito a essa variável.

O primeiro termo da Equação 5 corresponde à deflexão da fundação profunda, enquanto o segundo termo descreve a interação com o solo conforme o modelo de Winkler. Essa equação expressa o equilíbrio entre o momento fletor interno da fundação (modelada como viga) e a reação oferecida pelo solo, representado por molas que resistem aos deslocamentos laterais.

3.1 Método dos Elementos Finitos: modelagem da fundação e da interação solo-estrutura

A modelagem numérica de fundações profundas submetidas à ação de carregamento horizontal aplicado no topo, conforme descrito na Equação 5, pode ser realizada por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), considerando-se a interação solo-estrutura a partir do modelo de fundação elástica de Winkler. A formulação adotada neste estudo baseia-se nas contribuições de Zienkiewicz, Taylor e Govindjee (2024) e Logan (2022), utilizando o modelo clássico de Winkler para representar a fundação elástica.

A fundação é discretizada em n_e elementos de comprimento L constante. Cada elemento possui dois nós (inicial i e final j), e cada nó apresenta dois graus de liberdade: deslocamento lateral horizontal u e rotação θ .

O solo é representado por um conjunto de molas independentes ao longo do fuste da fundação, cuja rigidez é proporcional ao deslocamento lateral local.

O vetor de deslocamentos nodais do elemento é definido por:

$$d = [u_i \ \theta_i \ u_j \ \theta_j]^T \quad (6)$$

em que T indica a transposição.

O deslocamento lateral ao longo do elemento (u) é interpolado utilizando funções de Hermite cúbicas. Após simplificações, obtêm-se as quatro funções de forma (N_1, N_2, N_3 e N_4):

$$u = N_1 u_i + N_2 \theta_i + N_3 u_j + N_4 \theta_j = N \cdot d \quad (7)$$

com:

$$N = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = \left[\left(\frac{2z^3}{L^3} - \frac{3z^2}{L^2} + 1 \right) \quad \left(z - \frac{2z^2}{L} + \frac{z^3}{L^2} \right) \quad \left(\frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z^3}{L^3} \right) \quad \left(\frac{z^3}{L^2} - \frac{z^2}{L} \right) \right] \quad (8)$$

A matriz de rigidez de um elemento de viga é obtida com base no Princípio dos Trabalhos Virtuais, segundo o qual, em equilíbrio, o trabalho interno realizado pelos esforços reais sob deslocamentos virtuais é igual ao trabalho externo realizado pelas forças virtuais sob os deslocamentos reais. Essa relação é aplicada por meio de integração ao longo do comprimento do elemento L :

$$K_{viga}^{(e)} = \int_0^L B^T E_p I_p B dz \quad (9)$$

em que $B = D_z^2 N$ representa o vetor das segundas derivadas das funções de forma com relação a z , e o expoente T indica a transposição matricial.

Considerando a rigidez flexional $E_p \cdot I_p$ constante ao longo da profundidade, a Equação 9 pode ser reescrita em forma matricial como:

$$K_{viga}^{(e)} = \frac{E_p I_p}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (10)$$

Para problemas unidimensionais, a interação solo-fundação é representada por molas horizontais de rigidez k_s (dimensão $[F/L]$), distribuídas ao longo do fuste. Cada nó da estrutura possui uma mola de translação acoplada, representando a resistência lateral do solo. Essa mola pode ser comprimida ou tracionada lateralmente, adicionando rigidez k_s ao nó correspondente.

Como cada elemento finito possui comprimento L , e considerando o módulo de reação horizontal do solo K_h com dimensão (F/L^2) , adota-se $k_s = K_h \cdot L$ como rigidez da mola equivalente em cada nó.

A matriz de rigidez elementar correspondente à contribuição das molas é dada por:

$$K_{mola}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{4 \times 4} \quad (11)$$

A matriz de rigidez total do elemento, considerando a interação solo-estrutura, é obtida pela soma das matrizes elementares fornecidas nas Equações 10 e 11, ou seja: $K^{(e)} = K_{viga}^{(e)} + K_{mola}^{(e)}$.

A montagem da matriz de rigidez global do sistema solo-fundação, $K(z)$, é realizada pela superposição clássica, conforme o MEF, das matrizes de rigidez dos elementos individuais $K^{(e)}$.

Neste trabalho, o carregamento horizontal aplicado à fundação profunda consiste em uma força horizontal H_p e/ou um momento fletor M_p , ambos atuantes no topo (cabeça) da estrutura. Esses carregamentos são inseridos no vetor global de forças generalizadas (f), nas posições correspondentes aos graus de liberdade do nó da extremidade do sistema, respectivamente na primeira e na segunda posição desse vetor.

A resolução do sistema estático resultante:

$$K(z)u(z) = f \quad (12)$$

em que: $K(z)$ representa a matriz de rigidez global do sistema; $u(z)$ é o vetor global de deslocamentos generalizados; f é o vetor global de forças generalizadas, é realizada por meio da inversão da matriz de rigidez global:

$$u(z) = K^{-1}(z) \cdot f \quad (13)$$

Uma vez obtido o vetor de deslocamentos globais, u , torna-se possível calcular o vetor de rotações nodais θ , bem como os diagramas de momento fletor M e esforço cortante V , os quais são fundamentais para a análise e o dimensionamento estrutural da fundação profunda.

As rotações e os esforços internos atuantes ao longo do comprimento da fundação são calculados com base nas equações da teoria da viga de Euler-Bernoulli, a saber:

$$\theta = D_z \cdot u \quad (14)$$

$$M = E_p \cdot I_p \cdot D_z^2 u \quad (15)$$

$$V = D_z \cdot M = E_p \cdot I_p \cdot D_z^3 \cdot u \quad (16)$$

Substituindo a Equação 7 nas Equações 14, 15 e 16, obtêm-se as expressões no nível elementar:

$$\theta^{(e)} = [D_z N_1 u_i + D_z N_2 \theta_i + D_z N_3 u_j + D_z N_4 \theta_j] = D_z \cdot N \cdot d \quad (17)$$

$$M^{(e)} = E_p \cdot I_p [D_z^2 N_1 u_i + D_z^2 N_2 \theta_i + D_z^2 N_3 u_j + D_z^2 N_4 \theta_j] = E_p \cdot I_p \cdot D_z^2 \cdot N \cdot d \quad (18)$$

$$V^{(e)} = E_p \cdot I_p [D_z^3 N_1 u_i + D_z^3 N_2 \theta_i + D_z^3 N_3 u_j + D_z^3 N_4 \theta_j] = E_p \cdot I_p \cdot D_z^3 \cdot N \cdot d \quad (19)$$

As derivadas de primeira, segunda e terceira ordens das funções de forma N , utilizadas nas Equações 17, 18 e 19, podem ser expressas, de forma matricial, conforme segue:

$$\begin{bmatrix} D_z N_1 & D_z N_2 & D_z N_3 & D_z N_4 \\ D_z^2 N_1 & D_z^2 N_2 & D_z^2 N_3 & D_z^2 N_4 \\ D_z^3 N_1 & D_z^3 N_2 & D_z^3 N_3 & D_z^3 N_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{6z}{L^2} + \frac{6z^2}{L^3} & 1 - \frac{4z}{L} + \frac{3z^2}{L^2} & \frac{6z}{L^2} - \frac{6z^2}{L^3} & \frac{3z^2}{L^2} - \frac{2z}{L} \\ -\frac{6}{L^2} + \frac{12z}{L^3} & -\frac{4}{L} + \frac{6z}{L^2} & \frac{6}{L^2} - \frac{12z}{L^3} & \frac{6z}{L^2} - \frac{2}{L} \\ \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12z}{L^3} & \frac{6}{L^2} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Por fim, a inclinação θ , o momento fletor M e o esforço cortante V , ao longo de toda a fundação profunda, podem ser obtidos de maneira contínua por meio da sobreposição dos resultados elementares, conforme as Equações 17, 18 e 19.

3.2 Modelo analítico de Hetényi: módulo K_h constante com a profundidade

No modelo analítico de Hetényi, a análise estrutural de fundações profundas longas embutidas no solo baseia-se na mesma equação diferencial clássica da viga sobre fundação elástica, apresentada na Equação 5. A resposta lateral da estrutura, quando submetida a ações horizontais, é analisada considerando-se a fundação profunda como uma viga de largura B , apoiada sobre um meio elástico contínuo que simula a reação do solo.

Esse meio elástico é modelado por molas distribuídas com rigidez K_h por unidade de comprimento. Além disso, a fundação profunda encontra-se parcialmente embutida no solo, podendo apresentar uma projeção de altura e acima da superfície do terreno.

Quando uma carga horizontal é aplicada na cabeça da fundação, essa ação pode ser representada por um par de cargas equivalentes: uma força horizontal H e um momento fletor $M = H \cdot e$, ambos aplicados na extremidade superior da fundação, que está inserida em um meio com comportamento elástico-linear.

Para que a fundação seja considerada longa (de comprimento semi-infinito), segundo Hetényi (1946), deve-se satisfazer a condição $\lambda L \leq 4$, em que λ é definido por:

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{K_h}{4 E_p I}} = \sqrt[4]{\frac{k_h B}{4 E_p I}} \quad (21)$$

A equação diferencial (5) pode ser resolvida com a introdução da variável adimensional $Z = \lambda z$, permitindo que as expressões analíticas para as grandezas estruturais sejam escritas em função das chamadas funções-resposta, obtidas por Hetényi.

Para uma fundação submetida a uma força horizontal H e a um momento fletor M aplicados no topo, as expressões para o deslocamento lateral u , o momento fletor M e o esforço cortante V ao longo do comprimento da fundação são dadas por:

$$u = D_\lambda(Z) \cdot \left(\frac{2H}{\lambda K_h} \right) + C_\lambda(Z) \cdot \left(\frac{2M}{\lambda^2 K_h} \right) \quad (22)$$

$$M = B_\lambda(Z) \cdot \left(\frac{H}{\lambda} \right) + A_\lambda(Z) \cdot M \quad (23)$$

$$V = C_\lambda(Z) \cdot H + 2 B_\lambda(Z) \cdot M \quad (24)$$

As funções adimensionais $A_i(Z)$, $B_i(Z)$, $C_i(Z)$ e $D_i(Z)$ dependem da profundidade adimensional Z e podem ser consultadas em Alonso (2019).

Adicionalmente, expressões aproximadas podem ser utilizadas para estimar o deslocamento lateral máximo na cabeça da fundação, no caso particular de $z = 0$:

$$u_0 = 2 K_h^{-1} (H\lambda + M \lambda^2) \quad (25)$$

Segundo Alonso (2019), o momento fletor máximo ocorre a uma profundidade adimensional $\lambda z = 0,7$, podendo ser estimado por:

$$M_{max} = 0,32 H \lambda^{-1} + 0,7 M \quad (26)$$

As Equações 25 e 26 são úteis para avaliações preliminares de projeto, contribuindo para a verificação da estabilidade e da deformabilidade da fundação.

3.3 Modelo analítico de Miche: módulo K_h linearmente crescente com a profundidade

Para solos em que o módulo de reação horizontal K_h varia linearmente com a profundidade, a Equação 5 deve ser modificada com a inclusão da taxa de crescimento do coeficiente de reação n_h , de modo que $K_h = k_h \cdot d = n_h \cdot z$.

Miche (1930) desenvolveu uma solução aproximada para o caso de fundações profundas submetidas a carregamento horizontal H aplicado no topo. O solo é modelado como uma fundação elástica contínua do tipo Winkler, com coeficiente de reação horizontal variando linearmente com a profundidade.

A solução de Miche introduz o conceito de rigidez relativa estaca-solo T , definida como:

$$T = (E_p I_p n_h^{-1})^{\frac{1}{5}} \quad (27)$$

Com base em T , Miche obteve soluções analíticas aproximadas para os principais parâmetros estruturais da estaca. As expressões para o deslocamento horizontal no topo u_0 , a inclinação $\tan\theta$, e o momento fletor máximo $M_{m\acute{a}x}$ são dados por:

$$u_0 = 2,4 T^3 H (E_p I_p)^{-1} \quad (28)$$

$$\tan\theta = 2,4 H (B T^2)^{-1} \quad (29)$$

$$M_{m\acute{a}x} = 0,79 HT, \text{ para } z = 2,78 T \quad (30)$$

Conforme indicado, o momento máximo ocorre a uma profundidade $z = 2,78T$.

Segundo Miche (1930 *apud* Rosendo, 2020), os diagramas de reação do solo, deslocamento, momento fletor e esforço cortante devem ser analisados até a profundidade de aproximadamente $3,96T$, pois, a partir desse ponto, os efeitos estruturais tornam-se desprezíveis.

Essa recomendação também é corroborada por Velloso e Lopes (2011), que consideram que os momentos fletores e esforços cortantes são praticamente nulos a partir de profundidades da ordem de $4T$, justificando a limitação da análise prática a esse trecho da estaca.

Portanto, para efeitos práticos, considera-se que uma fundação profunda é “longa” quando seu comprimento L_p é maior ou igual a quatro vezes a rigidez relativa estaca-solo (T), ou seja, $L_p \geq 4$.

A escolha entre os modelos de Hetényi e Miche deve considerar o tipo de solo e o nível de tensões efetivas atuantes, especialmente em solos argilosos. Segundo Terzaghi (1955), conforme citado por Velloso e Lopes (2011), o coeficiente de reação horizontal k_h apresenta comportamentos distintos conforme a condição de adensamento: (a) em argilas muito sobre-adensadas, k_h pode ser considerado constante ao longo da profundidade; (b) em argilas normalmente adensadas e em areias, k_h tende a aumentar de forma aproximadamente linear com a profundidade.

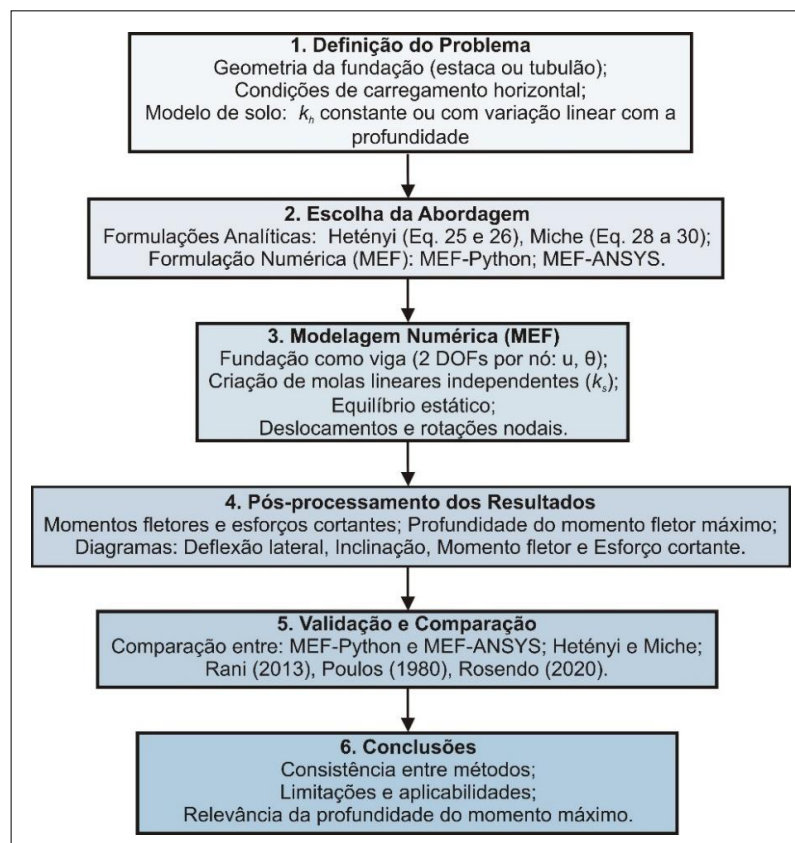
O modelo de Hetényi admite a aplicação de carga horizontal e/ou momento fletor no topo da estaca, enquanto o modelo de Miche, tal como adotado neste trabalho, restringe-se à aplicação de carga horizontal no topo. Ambos os modelos são indicados para solos homogêneos: o modelo de Hetényi assume rigidez constante, ao passo que o de Miche permite variação contínua do módulo com a profundidade. No entanto, nenhum dos dois se mostra adequado para perfis estratificados com camadas bem definidas, como alternâncias abruptas entre argilas moles e areias compactas. Nesses casos, recomenda-se a adoção de modelos multicamadas ou de métodos numéricos, como o MEF, que permitem representar de forma explícita a heterogeneidade do perfil geotécnico.

Portanto, os modelos de Hetényi e Miche aplicam-se a contextos geotécnicos específicos, sendo necessário considerar o tipo de solo, as condições de carregamento e as hipóteses de cada abordagem. Já o Método dos Elementos Finitos oferece maior flexibilidade na representação de perfis heterogêneos e na simulação de diferentes condições de contorno, ampliando sua aplicabilidade a casos mais complexos.

4 Metodologia

Com o objetivo de facilitar a reprodução da metodologia empregada, elaborou-se um fluxograma com as etapas principais da análise, desde a formulação até a comparação dos resultados. Esse processo encontra-se descrito na Figura 2.

Figura 2 ►
Fluxograma da metodologia adotada neste trabalho.
Fonte: elaborado pelos autores



Este trabalho adota três abordagens complementares para a análise de fundações profundas submetidas a ações horizontais aplicadas transversalmente no topo: duas formulações analíticas, baseadas nos modelos de Hetényi (1946) e de Miche (1930), e uma formulação numérica, desenvolvida por meio do Método dos Elementos Finitos (MEF), implementada no ambiente de programação Python. Para a elaboração do código, foram utilizadas as bibliotecas NumPy e Matplotlib.

As análises consideram dois tipos distintos de variação do módulo de reação horizontal do solo K_h : i) constante ao longo da profundidade; ii) com crescimento linear em função da profundidade, conforme abordagens clássicas da engenharia geotécnica.

Na modelagem numérica via MEF, a fundação profunda é representada por um elemento linear de viga com dois graus de liberdade por nó: deslocamento lateral u e rotação θ . A interação solo-estrutura é simulada por molas lineares independentes, com rigidez k_s (dimensão F/L), associada ao módulo de reação horizontal do solo K_h .

A equação governante do sistema solo-fundação é resolvida no regime estático. A partir da obtenção dos deslocamentos horizontais ao longo do eixo da fundação, calculam-se as rotações nodais e os esforços internos (momentos fletores e esforços cortantes). Adicionalmente, é determinada a profundidade na qual ocorre o momento fletor máximo, parâmetro de grande relevância para o dimensionamento estrutural.

A modelagem numérica detalha não apenas as expressões para os deslocamentos, mas também as relações analíticas utilizadas para a obtenção da inclinação e dos esforços internos. Essa sistematização visa contribuir para a transparência e a reprodutibilidade do estudo, visto que essas expressões nem sempre são apresentadas de forma clara na literatura.

Neste trabalho, são analisados dois modelos de fundações profundas, ambos classificados como “longas”:

- Modelo 1: estaca de grande diâmetro inserida em solo com K_h constante com a profundidade;
- Modelo 2: tubulão inserido em solo com K_h variando linearmente com a profundidade.

As formulações analíticas simplificadas também são implementadas em Python. As Equações 25 e 26 são referidas como formulação simplificada de Hetényi, enquanto as Equações 28, 29 e 30 como formulação simplificada de Miche. Além da implementação das equações analíticas, os modelos numéricos MEF são também codificados no ambiente Python (denominado aqui como MEF-Python) e comparados com simulações realizadas no software ANSYS/Mechanical, ambiente APDL (denominado MEF-ANSYS). No ANSYS-APDL, utilizou-se, na modelagem, o elemento BEAM3 para a fundação profunda e o elemento COMBIN4 para os elementos de mola. O elemento BEAM3 possui dois graus de liberdade de translação por nó, enquanto o COMBIN4 possui dois nós e foi restringido de maneira a apresentar apenas um grau de liberdade de translação horizontal por nó. No ANSYS-APDL, a modelagem da fundação profunda foi realizada por meio do elemento BEAM3, que apresenta três graus de liberdade por nó: duas translações (horizontal e vertical) e uma rotação. Para representar os elementos de mola, utilizou-se o elemento COMBIN4, constituído por dois nós e configurado de modo a considerar apenas o grau de liberdade de translação horizontal por nó.

Os resultados obtidos para ambos os modelos (estaca e tubulão) incluem os seguintes parâmetros: diagrama de deflexão lateral; inclinação da fundação; momentos fletores; esforços cortantes; profundidade de ocorrência do momento fletor máximo.

Os valores obtidos via MEF-Python e MEF-ANSYS são confrontados com as soluções analíticas simplificadas de Hetényi (1946) e Miche (1930), além de resultados previamente publicados na literatura, tais como:

- Soluções numéricas de Rani (2013), obtidas com o software OpenSees;
- Resultados analíticos de Poulos (1980 *apud* Rani, 2013);
- Solução analítica completa de Miche, conforme apresentado por Rosendo (2020).

5 Resultados e discussões

Nesta seção, são apresentados e analisados os resultados obtidos a partir da aplicação de diferentes modelos de reação do solo frente a cargas horizontais em fundações profundas. Inicialmente, considera-se o comportamento do solo com módulo de reação horizontal constante ao longo da profundidade, abordagem que permite uma análise simplificada, comumente adotada em fases iniciais de projeto. Em seguida, é examinado o caso em que o módulo de reação varia linearmente com a profundidade, representando de forma mais realista o aumento da rigidez do solo em camadas mais profundas. A comparação

entre os modelos possibilita avaliar a influência dessas diferentes idealizações sobre os deslocamentos e esforços internos na fundação, fornecendo subsídios técnicos para decisões mais adequadas em projetos geotécnicos.

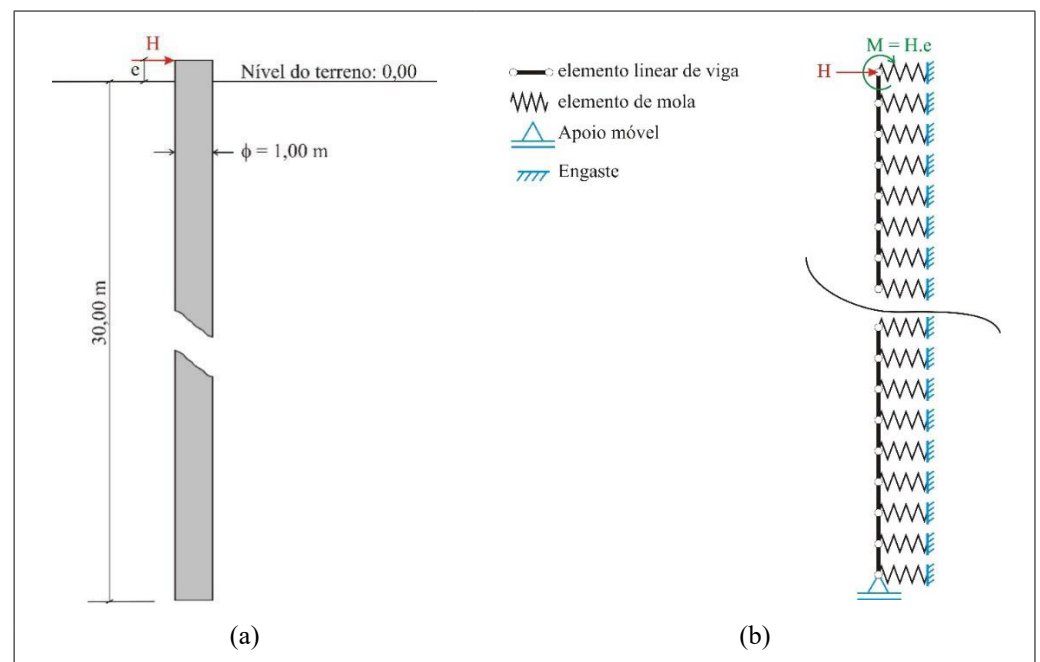
5.1 Módulo de reação horizontal constante com a profundidade

Conforme ilustrado na Figura 3a, analisa-se uma estaca com 30 metros de comprimento e 1,0 metro de diâmetro, submetida a uma carga horizontal H aplicada em seu topo, inserida em solo com módulo de reação horizontal K_h constante ao longo da profundidade. Essa configuração foi inicialmente investigada por Rani (2013).

A estaca, de concreto armado, possui resistência característica à compressão $f_{ck} = 35$ MPa. O módulo de elasticidade longitudinal do concreto foi estimado por meio da equação empírica $E_c = 5000 \sqrt{f_{ck}}$, conforme expressão adotada por Rani (2013), considerando f_{ck} em MPa. O momento de inércia da seção transversal circular da estaca é calculado por $I_p = \pi \cdot \phi^4 / 64$.

Figura 3 ▶

Estaca longa sujeita ao carregamento horizontal H e inserida em um solo com coeficiente de reação constante com a profundidade (a) e modelada via MEF (b).
Fonte: elaborado pelos autores



O solo onde a estaca está inserida apresenta módulo de deformabilidade $E_s = 10$ MPa, o que, segundo Rani (2013), resulta em um módulo de reação horizontal $K_h = 10.000$ kN/m². A carga H é aplicada a 0,50 m acima da superfície do terreno ($e = 0,50$ m), gerando, assim, um momento fletor $M = H \cdot e$ na interface com o solo.

A Figura 3b apresenta o esquema do modelo solo-fundação implementado via MEF, evidenciando a aplicação das cargas H e M , bem como a distribuição dos elementos de mola com rigidez K_h ao longo da profundidade da estaca. Também são indicadas as condições de contorno adotadas, incluindo a restrição dos deslocamentos verticais na base da fundação e o travamento de todos os graus de liberdade das molas que não estão em contato com o fuste da estaca.

Foram considerados dois níveis de carregamento horizontal: $H = 1350$ kN e $H = 1690$ kN (em kN.m), com os respectivos momentos (em kN.m). A resposta estrutural

do sistema solo-fundação foi obtida por meio das deflexões ao longo da profundidade, bem como dos diagramas de inclinação, momento fletor e esforço cortante no fuste da estaca.

A discretização da estaca no modelo MEF foi realizada com 3.400 elementos de comprimento uniforme, resultando em uma matriz de rigidez global com 6.802 graus de liberdade. A escolha desse número de elementos baseou-se em uma análise de convergência de malha, tomando como referência os resultados dos diagramas de momento fletor (M) e esforço cortante (V). A malha foi considerada convergente quando as variações entre os resultados se estabilizaram na terceira casa decimal.

A Tabela 1 apresenta os valores de deflexão no topo da estaca, considerando os dois níveis de carga, conforme diferentes formulações propostas na literatura. As soluções analíticas de Hetényi (1946), obtidas neste trabalho, são adotadas como referência. Também são apresentados os resultados do modelo analítico simplificado de Hetényi, e do modelo MEF-Python, desenvolvido pelos autores.

Tabela 1 ►

Comparação das deflexões no topo da estaca obtidas por diferentes formulações, para cargas transversais de 1350 kN e 1690 kN.

Fonte: (a) dados da pesquisa. (b) obtido por Rani (2013)

Formulações	Deflexão (mm)		Diferença percentual (%)	
	$H = 1350$ kN	$H = 1690$ kN	$H = 1350$ kN	$H = 1690$ kN
Hetényi (ref.) ^(a)	27,362	34,253	–	–
Hetényi simplificada ^(a)	27,362	34,253	0,000	0,000
Poulos ^(b)	28,420	35,580	3,867	3,874
MEF-OpenSees ^(b)	28,020	35,080	2,405	2,414
MEF-Python ^(a)	27,297	34,172	0,238	0,236

Observa-se que os valores obtidos pela formulação de Poulos (1980 *apud* Rani, 2013) apresentaram deflexões ligeiramente superiores, com diferença de 3,87% para ambas as cargas, em relação ao modelo analítico de Hetényi (1946), considerado como referência nos cálculos percentuais. A formulação de Rani (2013), por meio do MEF implementado no software OpenSees, também superestimou os deslocamentos, porém com desvios menores (2,41%), independentemente do valor de H .

Em contrapartida, o modelo MEF-Python desenvolvido neste trabalho apresentou excelente concordância com a solução de Hetényi (1946), com diferenças percentuais inferiores a 0,24%, o que evidencia a precisão da modelagem numérica adotada.

A Tabela 2 apresenta os valores máximos dos momentos fletores e as profundidades em que ocorrem, considerando as diferentes formulações analisadas.

Tabela 2 ▼

Comparação entre os momentos fletores máximos e suas posições para diferentes modelagens de estacas carregadas transversalmente no topo sob cargas de 1350 kN e 1690 kN.

Fonte: dados da pesquisa.

Carga H (kN)	Formulações	Momento fletor		Diferença percentual (%)	
		Magnitude (N.m)	Posição (m)	Momento fletor	Posição
1350	Hetényi (ref. I)	2.083.104,616	2,613	–	–
	Hetényi simplificada	2.083.926,302	2,736	0,039	4,707
	MEF-Python	2.081.129,207	2,479	0,095	5,128
1690	Hetényi (ref. I)	2.607.738,371	2,613	–	–
	Hetényi simplificada	2.608.767,000	3,425	0,039	31,075
	MEF-Python	2.605.265,451	2,479	0,095	5,128

As Figuras 4 e 5 ilustram os diagramas de deflexão, inclinação, momento fletor e esforço cortante ao longo da profundidade z , considerando os carregamentos horizontais de 1350 kN e 1690 kN, respectivamente. Os resultados foram obtidos via modelo MEF-Python.

Figura 4 ►

Diagramas da deflexão, inclinação, momento fletor e esforço cortante para $H = 1350$ kN (modelo MEF-Python).
Fonte: dados da pesquisa.

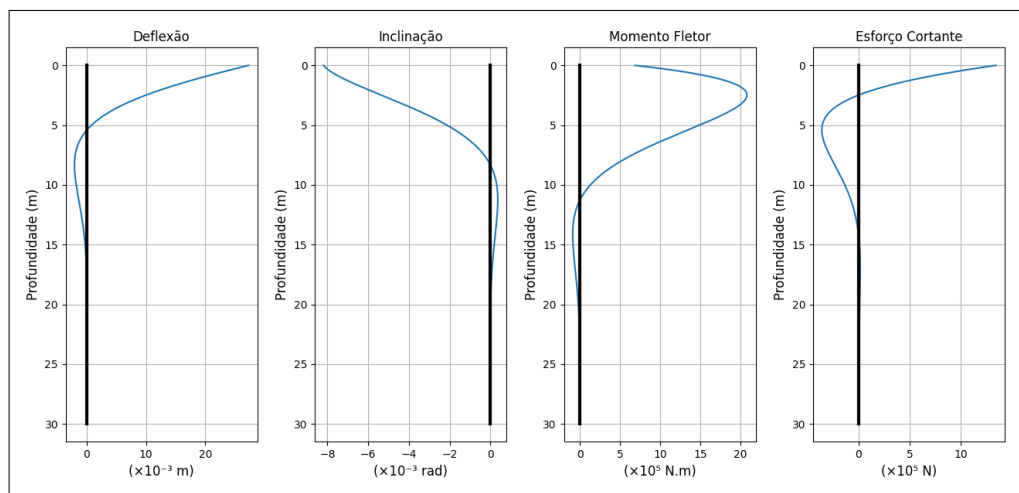
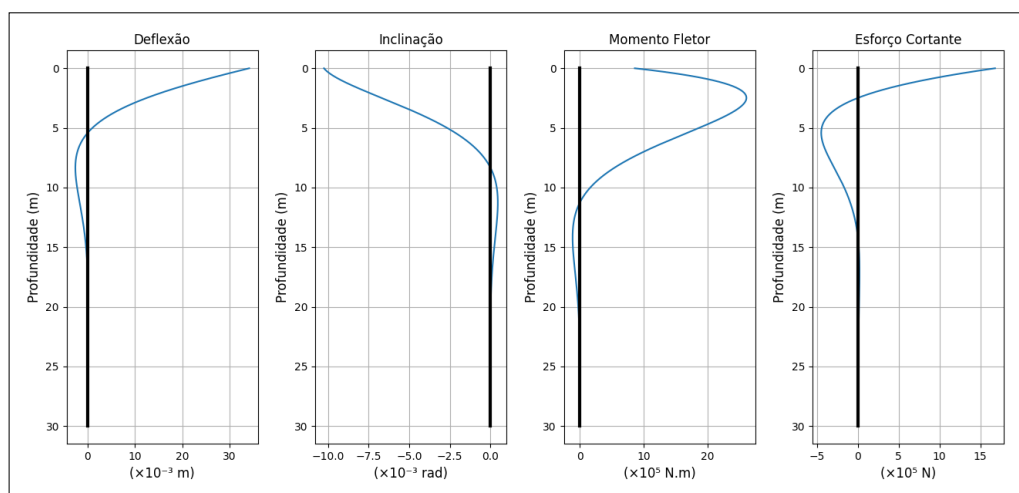


Figura 5 ►

Diagramas da deflexão, inclinação, momento fletor e esforço cortante para $H = 1690$ kN (modelo MEF-Python).
Fonte: dados da pesquisa.



Os resultados indicam que as diferenças entre os momentos fletores máximos estimados pelas diferentes formulações são relativamente pequenas. A formulação simplificada de Hetényi superestimou levemente a magnitude do momento fletor, com variação de 0,039% para ambas as cargas. O modelo MEF-Python apresentou subestimação inferior a 0,1%, demonstrando excelente aderência à solução de referência.

Por outro lado, quanto à posição do momento fletor máximo ao longo da profundidade, observaram-se variações mais significativas. A formulação simplificada de Hetényi deslocou essa posição para regiões mais profundas, com diferença de 4,707% para 1350 kN e 31,075% para 1690 kN. Já o modelo MEF-Python posicionou o momento máximo em regiões ligeiramente mais superficiais, com diferença de 5,128% em ambas as cargas.

Essas variações podem impactar o dimensionamento da armadura, especialmente quanto ao posicionamento da armadura longitudinal ao longo do fuste. Um deslocamento do ponto de momento máximo pode ocasionar superdimensionamento ou subdimensionamento local, sobretudo quando se adota um modelo que subestima a profundidade crítica. No

caso da armadura transversal, embora a influência seja menos direta, alterações no diagrama de esforços podem modificar as regiões de maior solicitação cortante. Assim, a escolha do modelo adotado afeta não apenas a magnitude dos esforços internos, mas também a distribuição espacial das solicitações ao longo da fundação.

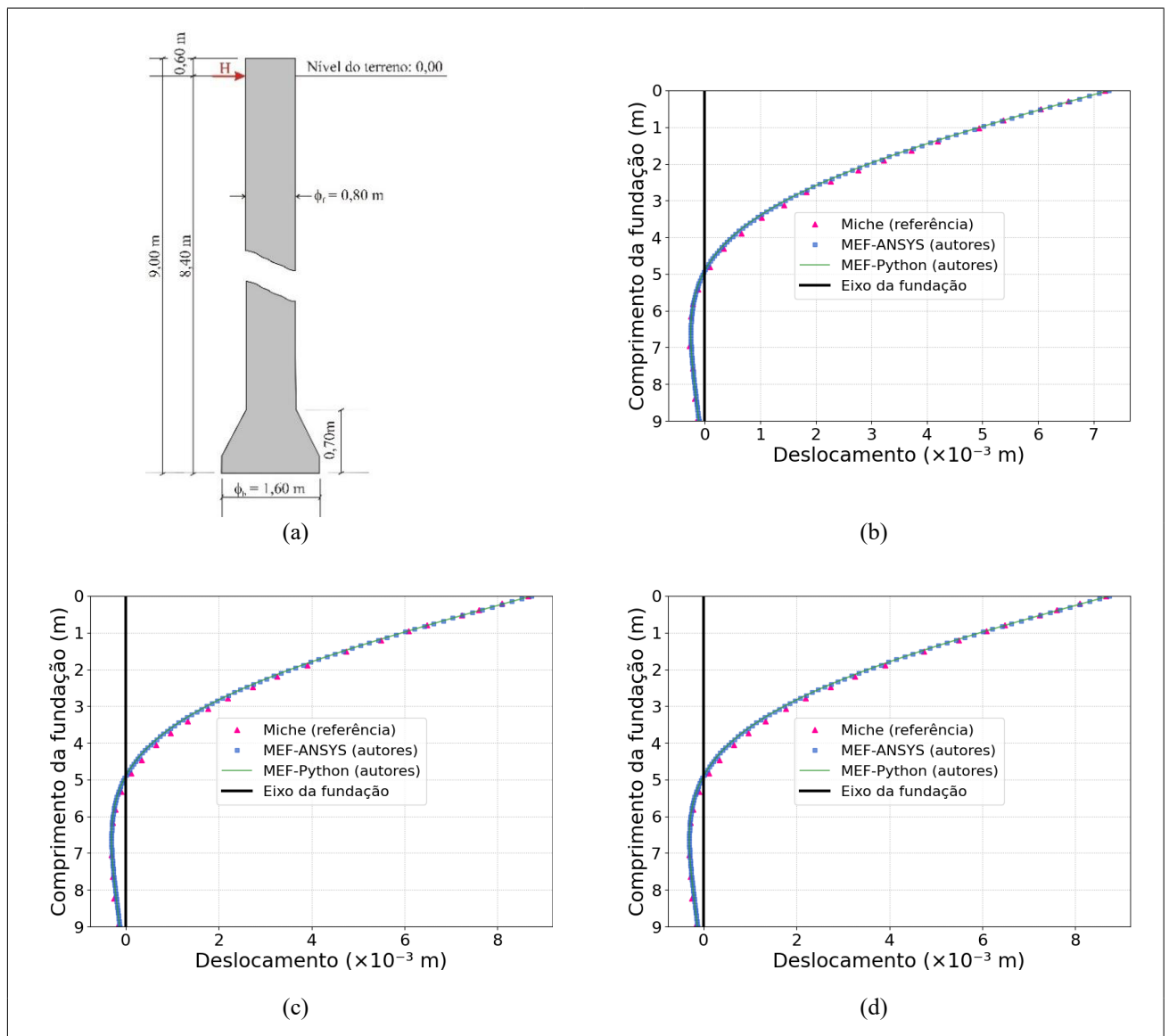
Figura 6 ▼

(a) Tubulão com carga horizontal aplicada no topo e inserido em solo com módulo de reação variando linearmente com a profundidade. Deslocamentos horizontais ao longo da profundidade da fundação obtidos para cargas laterais de 150 kN (b), 160 kN (c) e 180 kN (d), por diferentes formulações. *Fonte: dados da pesquisa.*

Essas variações reforçam a importância de uma modelagem refinada da interação solo-estaca, sobretudo em análises estruturais detalhadas. Ainda que os valores máximos dos esforços estejam em boa concordância, a exata posição de ocorrência desses esforços pode influenciar significativamente o dimensionamento da armadura e a segurança da fundação.

5.2 Módulo de reação horizontal linear com a profundidade

A segunda aplicação numérica baseia-se nos estudos experimentais de Kassouf (2012) e na solução analítica exata desenvolvida por Miche (1930), apresentada por Rosendo (2020). Analisa-se um tubulão com 9 metros de comprimento, diâmetro do fuste (ϕ_f) igual a 80 cm, diâmetro da base (ϕ_b) de 160 cm e altura da base de 70 cm, conforme ilustrado na Figura 6a.



O módulo de elasticidade do concreto foi estimado por Kassouf (2012) por meio da equação empírica $E_c = 0,85.5600 \sqrt{f_{ck}}$, com $f_{ck} = 20$ MPa. O coeficiente de reação horizontal da interface solo-tubulão foi considerado como $n_h = 12000$ kN/m³, variável linearmente com a profundidade, conforme determinado experimentalmente pelos mesmos autores.

No experimento de Kassouf (2012), a carga horizontal H foi aplicada na posição correspondente ao nível 0,00 m do terreno. Entretanto, neste trabalho, optou-se por aplicar a carga horizontal no topo do tubulão, a +0,60 m do nível do terreno, conforme indicado na Figura 6a. Essa escolha visa permitir a comparação com o modelo analítico de Miche (1930) apresentado por Rosendo (2020), o qual também desconsiderou a altura da aplicação real da carga, conforme reportado por Kassouf (2012).

Apesar dessas simplificações, Rosendo (2020) demonstrou que a solução analítica exata de Miche apresenta boa concordância com os dados experimentais, o que justifica sua adoção como referência neste estudo.

Com base na Equação 27, a rigidez relativa T foi estimada em aproximadamente 2,044 m. Como o comprimento do tubulão é m , ou seja, superior a $4T$, o elemento é classificado como tubulão longo.

Nesse trabalho, assim como em Rosendo (2020), o modelo do tubulão desconsidera o alargamento de sua base, assumindo-se um diâmetro constante (ϕ), semelhante ao modelo de estacas. As cargas horizontais aplicadas foram $H = 150$ kN, $H = 160$ kN e $H = 180$ kN.

A omissão do alargamento da base foi uma simplificação adotada na modelagem. No entanto, essa escolha pode resultar na subestimação da rigidez da fundação e, conseqüentemente, na superestimação dos deslocamentos horizontais. Isso ocorre porque o alargamento da base tende a reduzir deslocamentos locais, ao ampliar a área de contato e oferecer maior suporte ao solo.

Os resultados de deslocamento horizontal, inclinação, momento fletor e esforço cortante ao longo do fuste foram obtidos por meio de quatro abordagens: i) modelo numérico MEF-Python; ii) modelo MEF-ANSYS; iii) solução analítica exata de Miche (1930), conforme empregada por Rosendo (2020); iv) solução analítica simplificada de Miche.

O modelo MEF-Python possui 4004 graus de liberdade (gdl), enquanto o modelo MEF-ANSYS conta com 2404 gdl. Os deslocamentos horizontais ao longo da profundidade do tubulão, para os três níveis de carga mencionados, são apresentados nas Figuras 6b, 6c e 6d.

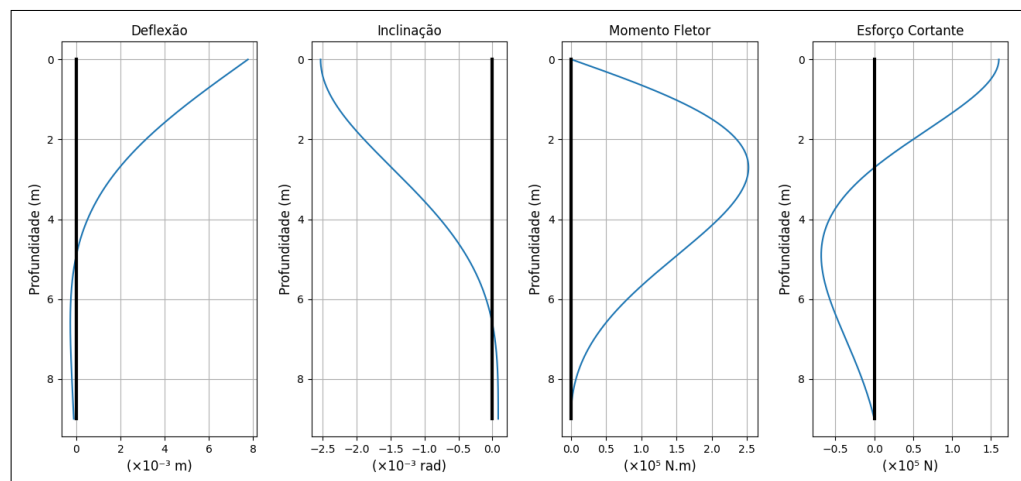
Observa-se excelente concordância entre as curvas obtidas pelas abordagens MEF-Python, MEF-ANSYS e a solução analítica exata de Miche (1930), indicando equivalência entre os métodos na previsão da resposta do tubulão submetido a cargas horizontais.

A Figura 7 (próxima página) apresenta os diagramas da deflexão, inclinação, momento fletor e esforço cortante ao longo do fuste do tubulão, obtidos com o MEF-Python para $H = 160$ kN.

Figura 7 ▶

Diagramas da deflexão, inclinação, momento fletor e esforço cortante ao longo do fuste do tubulão, obtidos com o MEF-Python, para carga horizontal de 160 kN.

Fonte: dados da pesquisa.



As Tabelas 3, 4 e 5 apresentam, de forma comparativa, os valores do momento fletor máximo e sua posição de ocorrência, além da deflexão horizontal máxima no topo do tubulão, considerando os diferentes modelos. Os valores de referência são os obtidos com o MEF-Python.

Tabela 3 ▶

Comparação entre o momento fletor máximo e sua posição ao longo do fuste do tubulão, considerando os modelos MEF-Python e MEF-ANSYS, para diferentes cargas horizontais aplicadas.

Fonte: dados da pesquisa.

Carga (kN)	MEF-ANSYS		MEF-Python		Diferença percentual % MEF-ANSYS vs MEF-Python	
	Momento (N.m)	Posição* (m)	Momento (N.m)	Posição* (m)	Momento fletor	Posição
150	236.393,825	2,700	236.382,816	2,706	0,005	0,222
160	252.153,413	2,700	252.141,670	2,706	0,005	0,222
180	283.672,590	2,700	283.659,379	2,706	0,005	0,222

*posição medida a partir do topo do tubulão

Tabela 4 ▶

Comparação entre o momento fletor máximo e sua posição no tubulão, considerando o MEF-Python e a formulação analítica simplificada de Miche, para diferentes cargas horizontais.

Fonte: dados da pesquisa.

Carga (kN)	Miche (Equação 27)		MEF-Python		Diferença percentual % Miche vs MEF-Python	
	Momento (N.m)	Posição* (m)	Momento (N.m)	Posição* (m)	Momento fletor	Posição
150	242.199,064	2,698	236.382,816	2,706	2,401	0,297
160	258.345,668	2,698	252.141,670	2,706	2,401	0,297
180	290.638,877	2,698	283.659,379	2,706	2,401	0,297

*posição medida a partir do topo do tubulão

Tabela 5 ▶

Comparação da deflexão horizontal máxima no topo do tubulão, para diferentes cargas horizontais, segundo os modelos MEF-Python e MEF-ANSYS e a solução analítica simplificada de Miche.

Fonte: dados da pesquisa.

Carga (kN)	Miche (Equação 27) (mm)	MEF-ANSYS (mm)	MEF-Python (mm)	Diferença percentual % Miche versus MEF-Python	Diferença percentual % MEF-ANSYS versus MEF-Python
160	7,660	7,763	7,762	1,332	0,013
180	8,618	8,733	8,733	1,334	0,000

Os resultados da Tabela 3 indicam excelente concordância entre os modelos numéricos. As diferenças percentuais foram inferiores a 0,005% para o momento fletor máximo e de apenas 0,222% para a sua posição ao longo do fuste.

A Tabela 4 mostra que a formulação analítica simplificada de Miche resultou em momentos ligeiramente superiores, com diferença percentual de 2,401%. Quanto à posição do momento fletor máximo, a diferença foi de apenas 0,297% (2,706 m), revelando boa compatibilidade qualitativa entre as abordagens.

Os resultados apresentados na Tabela 5 mostram que os valores de deflexão máxima no topo do tubulão, obtidos pelos modelos numéricos MEF-Python e MEF-ANSYS, são praticamente idênticos, confirmando a robustez da modelagem. Em comparação com a solução analítica simplificada de Miche, a diferença foi de aproximadamente 1,3%, indicando leve subestimação da deflexão pelo modelo analítico.

6 Considerações finais

A validação do modelo numérico de elementos finitos (MEF) implementado em Python, para a análise de estacas e tubulões longos submetidos a cargas transversais no topo e considerando o módulo de reação constante ou linearmente variável com a profundidade, foi realizada com base na boa concordância dos resultados obtidos. As comparações em termos de deslocamentos, momentos fletores e posições dos momentos máximos demonstraram elevada compatibilidade com diversas formulações analíticas e numéricas da literatura.

O modelo apresentou excelente aderência às soluções analíticas de Poulos (1980 *apud* Rani, 2013), Hetényi (1946) e Miche (1930), tanto na formulação simplificada quanto na exata desta última. A comparação com os resultados do software ANSYS APDL evidenciou que a modelagem desenvolvida em Python reproduz com alta precisão os resultados obtidos por ferramentas numéricas consagradas, reforçando a confiabilidade e a robustez da metodologia proposta.

A formulação numérica mostrou-se precisa e estável, permitindo a determinação detalhada dos deslocamentos, inclinações e esforços internos ao longo das fundações profundas estudadas, bem como a localização dos momentos fletores máximos. Esses parâmetros são essenciais para o dimensionamento estrutural, particularmente no detalhamento das armaduras em fundações de concreto armado.

As diferenças observadas entre os modelos comparados reforçam a relevância de uma modelagem criteriosa da interação solo-estrutura, sobretudo em projetos que demandam maior precisão. A abordagem numérica via MEF também foi confrontada com modelagens realizadas em softwares como OpenSees e ANSYS APDL, confirmando a capacidade do modelo implementado em Python de representar com fidelidade o comportamento estrutural de fundações profundas submetidas a esforços horizontais.

É importante destacar que a modelagem proposta apresenta limitações quanto à sua aplicação em fundações com geometrias complexas, como bases alargadas, em solos heterogêneos ou em situações que envolvam interação com estruturas superficiais, em razão das simplificações adotadas. A formulação baseada no MEF emprega o modelo de Winkler para representar as molas do solo, o qual considera respostas locais independentes, desconsiderando a interação entre pontos adjacentes do terreno.

Essa simplificação pode comprometer a precisão dos resultados, especialmente em casos que envolvam solos não homogêneos, anisotrópicos ou sujeitos a efeitos

tridimensionais complexos. Além disso, o modelo adotado não contempla não linearidades constitutivas, comportamentos dependentes do tempo nem efeitos cíclicos, os quais são relevantes para fundações submetidas a carregamentos dinâmicos ou repetitivos.

Dessa forma, recomenda-se, sempre que possível, a realização de ensaios experimentais com vistas à validação dos modelos numéricos e à garantia da confiabilidade dos resultados obtidos por meio da simulação computacional.

Conclui-se que a metodologia adotada neste estudo contribui de forma significativa para o entendimento das respostas geotécnico-estruturais de fundações profundas longas, fornecendo uma ferramenta útil tanto para o meio acadêmico quanto para aplicações profissionais. A aplicação do MEF, quando formulada de modo adequado, validada com base em abordagens analíticas, numéricas e/ou experimentais, e interpretada de forma coerente, pode oferecer soluções robustas e versáteis no projeto de fundações profundas.

Portanto, o estudo demonstra que o uso do MEF representa uma alternativa eficaz e flexível às formulações analíticas tradicionais, que, embora úteis, frequentemente se restringem a casos específicos e podem não oferecer a mesma adaptabilidade para diferentes cenários de projeto.

Como perspectivas futuras, propõe-se o aprimoramento da modelagem numérica mediante a incorporação de não linearidades do solo, a análise sob carregamentos cíclicos e o desenvolvimento de modelos tridimensionais acoplados, capazes de representar com maior realismo a complexidade dos perfis geotécnicos e das interações solo-estrutura.

Adicionalmente, sugere-se a condução de estudos de sensibilidade, com ênfase na avaliação do impacto de variáveis geométricas e paramétricas, como o alargamento da base do tubulão, utilizando-se, por exemplo, o MEF em conjunto com técnicas de Monte Carlo. Tais iniciativas podem ampliar a aplicabilidade e a precisão das simulações numéricas, contribuindo para projetos mais seguros, eficientes e adequados às condições reais de campo.

Financiamento

Esta pesquisa não recebeu financiamento externo.

Conflito de interesses

Os autores declaram não haver conflito de interesses.

Contribuições ao artigo

FARIA, A. W.: concepção, desenhos do estudo/pesquisa, análise e/ou interpretação dos dados, revisões com participação crítica e intelectual no manuscrito. **GARCIA, P. R.:** análise e/ou interpretação dos dados, revisões com participação crítica e intelectual no manuscrito. Todos os autores participaram da escrita, discussão, leitura e aprovação da versão final do artigo.

Referências

ABUSHAMA, K.; HAWKINS, W.; PELECANOS, L.; IBELL, T. Optimising the embodied carbon of laterally loaded piles using a genetic algorithm and finite element simulation. **Results in Engineering**, v. 24, 103188, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2024.103188>.

ALONSO, U. R. **Dimensionamento de fundações profundas**. 3. ed. São Paulo: Blucher, 2019.

ALVES, E. C.; FIOROTTI, K. M.; CARVALHO JÚNIOR, M. O. Análises dos efeitos da interação solo-estrutura em edifícios altos com lajes protendidas. **Revista Principia**, v. 57, p. 159-175, 2021. DOI: <https://doi.org/10.18265/1517-0306a2021id4855>.

API – AMERICAN PETROLEUM INSTITUTE. **Recommended practice for planning, designing and constructing fixed offshore platforms**. API RP 2A. Washington, D.C.: API, 2007.

APL ENGENHARIA. [Sem título]. 2020. 1 fotografia. Disponível em: <https://blog.apl.eng.br/wp-content/uploads/2020/02/feliz-2-14.png>. Acesso em: 10 abr. 2025.

BARBOSA, Y.; TAROZZO, M. H. P.; ALBUQUERQUE, P. J. R.; CARVALHO, D. Behavior of a new laterally top-loaded post-grouted micropile in highly porous lateritic soil. **Revista DYNA**, v. 90, n. 225, p. 123-131, 2023. DOI: <https://doi.org/10.15446/dyna.v90n225.104807>.

BRAUN, K. T.; MARKOU, G.; JACOBSZ, S. W.; CALITZ, D. Developing predictive models for the load-displacement response of laterally loaded reinforced concrete piles in stiff unsaturated clay using machine learning algorithms. **Structures**, v. 64, 106532, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106532>.

BROMS, B. B. Lateral resistance of piles in cohesionless soils. **Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division**, v. 90, n. 3, p. 123-158, 1964. DOI: <https://doi.org/10.1061/JSFEAQ.0000614>.

CHRISTAN, P.; PUPPI, R. Estudo da interação solo-estaca sob carregamento horizontal. **Geotecnia**, n. 133, p. 91-101, 2015. DOI: <https://doi.org/10.24849/j.geot.2015.133.07>.

DAS, B. M.; SIVAKUGAN, N. **Principles of foundation Engineering**. 9. ed. Boston: Cengage Learning, 2022.

DÍAZ, H.; SOARES, C. G. Review of the current status, technology and future trends of offshore wind farms. **Ocean Engineering**, v. 209, 107381, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2020.107381>.

FOURSOFF, W. E. **Investigation into a new CPT-based design method for large diameter monopiles in sand**. 2018. Master Thesis (Master in Offshore and Dredging Engineering) – Delft University of Technology, Delft, 2018. Disponível em: <https://repository.tudelft.nl/record/uuid:f403723b-2bcd-456e-ad58-2e11f8e7402b>. Acesso em: 14 jul. 2025.

HETÉNYI, M. **Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of Civil and Mechanical Engineering.** Ann Arbor: University of Michigan Press, 1946.

HU, Q.; HAN, F.; PREZZI, M.; SALGADO, R.; ZHAO, M. Finite-element analysis of the lateral load response of monopiles in layered sand. **Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering**, v. 148, n. 4, 2022. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)GT.1943-5606.0002745](https://doi.org/10.1061/(ASCE)GT.1943-5606.0002745).

JINDAL, S.; RAHMANLI, U.; ALEEM, M.; CUI, L.; BHATTACHARYA, S. Geotechnical challenges in monopile foundations and performance assessment of current design methodologies. **Ocean Engineering**, v. 310, part 1, 118469, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2024.118469>.

KASSOUF, R. **Análise de prova de carga em tubulão a céu aberto submetido a esforço horizontal em solo não saturado de diabásio da região de Campinas.** 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2012. Disponível em: <https://hdl.handle.net/20.500.12733/1618909>. Acesso em: 14 jul. 2025.

LOGAN, D. L. **A first course in the finite element method: enhanced.** 6. ed. Boston: Cengage Learning, 2022.

MA, J.; HAN, S.; GAO, X.; LI, D.; GUO, Y.; LIU, Q. Dynamic lateral response of the partially-embedded single piles in layered soil. **Applied Sciences**, v. 12, n. 3, 1504, 2022. DOI: <https://doi.org/10.3390/app12031504>.

MICHE, R. I. Investigation of piles subject to horizontal forces: application to quay walls. **Journal of the School of Engineering**, Giza, Egito, n. 4, 1930.

RANI, S. **Estimation of linear spring constant for laterally loaded monopile embedded in nonlinear soil.** 2013. Thesis (Master of Technology) – Indian Institute of Technology Gandhinagar, Ahmedabad, 2013. Disponível em: https://www.researchgate.net/publication/332110459_ESTIMATION_OF_LINEAR_SPRING_CONSTANT_FOR_LATERALLY_LOADED_MONOPILE_EMBEDDED_IN_NONLINEAR_SOIL. Acesso em: 21 abr. 2025.

REESE, L. C.; COX, W. R.; KOOP, F. D. Analysis of laterally loaded piles in sand. *In: OFFSHORE TECHNOLOGY CONFERENCE (OTC)*, 1974, Houston. **Proceedings** [...]. Houston: OTC, 1974. DOI: <https://doi.org/10.4043/2080-MS>.

ROSENDO, D. C. **Análise experimental e teórica de grupos de estacas carregadas horizontalmente em solo laterítico.** 2020. Tese (Doutorado em Engenharia Civil) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2020. Disponível em: <https://repositorio.unicamp.br/acervo/detalhe/1157997>. Acesso em: 14 jul. 2025.

ROSENDO, D. C.; ALBUQUERQUE, P. J. R. General analytical solution for laterally loaded pile-based Miche model. **Geotechnical and Geological Engineering**, v. 39, p. 765-782, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1007/s10706-020-01520-1>.

SOUZA, D. B.; DELALIBERA, R. G. Análise numérica de blocos sobre doze estacas: estudo de caso. **Revista Principia**, v. 61, n. 4, p. 890-914, 2024. DOI: <https://doi.org/10.18265/1517-0306a2022id7248>.

SUN, M.; SHAN, Z.; WANG, W.; XU, S.; LIU, X.; ZHANG, H.; GUO, X. Numerical investigation into the stability of offshore wind power piles subjected to lateral loads in extreme environments. **Journal of Marine Science and Engineering**, v. 12, n. 6, 915, 2024. DOI: <https://doi.org/10.3390/jmse12060915>.

TERZAGHI, K. Evaluation of coefficients of subgrade reaction. **Geotechnique**, v. 5, n. 4, p. 297-326, 1955. DOI: <https://doi.org/10.1680/geot.1955.5.4.297>.

VELLOSO, D. A.; LOPES, F. R. **Fundações: critérios de projeto, investigação do subsolo, fundações superficiais, fundações profundas**. 1. ed. Volume Completo. São Paulo: Oficina de Textos, 2011.

VESIC, A. B. Bending of beams resting on isotropic elastic solid. **Journal of the Engineering Mechanics Division**, v. 87, n. 2, p. 35-54, 1961. DOI: <https://doi.org/10.1061/JMCEA3.0000212>.

WANG, H.; LEHANE, B. M.; BRANSBY, M. F.; WANG, L. Z.; HONG, Y.; ASKARINEJAD, A. Lateral behavior of monopiles in sand under monotonic loading: insights and a new simple design model. **Ocean Engineering**, v. 277, 114334, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.oceaneng.2023.114334>.

ZHANG, X.; LI, J. Study on the structure parameters and design method optimization of blade-type screw steel pipe pile. **Heliyon**, v. 10, n. 15, e35046, 2024. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.heliyon.2024.e35046>.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; Govindjee, S. **The finite element method: its basis and fundamentals**. 8. ed. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2024.