

## Análise transiente e modal de edificações tipo *shear building* com consideração da deformação por cisalhamento e do efeito P-Delta

Milena Cardozo<sup>[1]</sup>, Luiz Antonio Farani de Souza<sup>[2]\*</sup>, Carlos Humberto Martins<sup>[3]</sup>, Alexandre Rossi<sup>[4]</sup>

<sup>[1]</sup> [pg405390@uem.br](mailto:pg405390@uem.br), <sup>[3]</sup> [chmartins@uem.br](mailto:chmartins@uem.br). Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Estadual de Maringá (UEM), Maringá, Paraná, Brasil

<sup>[2]</sup> [lasouza@utfpr.edu.br](mailto:lasouza@utfpr.edu.br). Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR), Apucarana, Paraná, Brasil. <http://orcid.org/0000-0001-7194-5851>

<sup>[4]</sup> [alexandre-rossi@ufu.br](mailto:alexandre-rossi@ufu.br). Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Federal de Uberlândia (UFU), Uberlândia, Minas Gerais, Brasil

\* autor correspondente

### Resumo

Com o avanço das tecnologias de cálculo e construção, a execução de edifícios cada vez mais altos e flexíveis tem se tornado comum, aumentando a suscetibilidade dessas estruturas a vibrações excessivas provocadas por cargas dinâmicas, como sismos e ventos. Nesse contexto, a realização de análises dinâmicas torna-se fundamental para garantir que os deslocamentos dessas estruturas não ultrapassem os limites estabelecidos por normas técnicas, preservando sua segurança e estabilidade. Este estudo desenvolve um código computacional para a análise dinâmica linear de estruturas do tipo *shear building*, considerando o efeito P-Delta. Esse modelo estrutural, amplamente utilizado por projetistas devido ao baixo custo computacional, é uma aproximação simplificada, porém eficaz, para análises preliminares de projetos estruturais. A deformação por cisalhamento dos pilares é incorporada no cálculo da rigidez por meio de um fator de correção. O efeito P-Delta é incluído de maneira aproximada, utilizando o método direto, em que a equação do movimento é modificada pela adição de um termo referente à matriz de rigidez geométrica, multiplicada pelo vetor de deslocamentos. O amortecimento estrutural é modelado pelo método de Rayleigh. Análises transientes e modais, realizadas com o software livre Scilab, são aplicadas a dois problemas dinâmicos de *shear building* extraídos da literatura. Os resultados indicam que, quando os valores da matriz de rigidez geométrica são da mesma ordem de grandeza que os da matriz de rigidez material da estrutura, o efeito P-Delta provoca alterações significativas nos deslocamentos. Caso contrário, a inclusão desse efeito nas análises dinâmicas tem impacto reduzido na resposta estrutural.

**Palavras-chave:** análise dinâmica; efeito P-Delta; deformação por cisalhamento; método de Newmark; *shear building*.

### *Transient and modal analysis of shear buildings considering shear deformation and P-Delta effects*

#### **Abstract**

*With the advancement of calculation and construction technologies, the development of increasingly taller and more flexible buildings has become common, which increases their susceptibility to excessive vibrations caused by dynamic loads, such as earthquakes and winds. In this context, performing dynamic analyses of these structures is essential to ensure that displacements do not exceed the limits established by technical standards, thus preserving safety and stability. This study develops a computational code for the linear dynamic analysis of shear building structures, considering the P-Delta effect. This structural model, widely used by designers due to its low computational cost, is a simplified yet effective approximation for preliminary structural design analyses. Shear deformation of the columns is incorporated into the stiffness calculation through a correction factor. The P-Delta effect is included using the direct method, in which the equation of motion is modified by adding a term corresponding to the geometric stiffness matrix, multiplied by the displacement vector. Structural damping is modeled using Rayleigh's method. Transient and modal analyses, performed with the open-source software Scilab, are applied to two dynamic shear-building*

problems found in the literature. The results indicate that when the values of the geometric stiffness matrix are of the same order of magnitude as the material stiffness matrix, the P-Delta effect significantly alters the displacements. Otherwise, including this effect in dynamic analyses has little impact on the structural response.

**Keywords:** dynamic analysis; Newmark's method; P-Delta effect; shear building; shear deformation.

## 1 Introdução

Os grandes avanços em tecnologias de análise estrutural, projeto, materiais e construção possibilitaram o desenvolvimento de estruturas cada vez mais esbeltas e altas. Como consequência, essas construções tornaram-se mais flexíveis e vulneráveis a vibrações excessivas provocadas por cargas dinâmicas, como sismos, ventos, ondas, entre outras (Oliveira; Brito; Avila, 2013). Essas vibrações podem resultar em danos estruturais e desempenho insatisfatório, podendo causar transtornos significativos, e, em casos extremos, vítimas (Rahimi; Aghayari; Samali, 2020).

No que se refere à obtenção de características dinâmicas de sistemas estruturais, duas análises podem ser empregadas: a modal e a transiente. A análise modal consiste em determinar as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da estrutura, enquanto a análise transiente avalia a resposta de uma estrutura submetida a um carregamento variável ao longo do tempo (Souza, 2024a).

O modelo de *shear building* é uma abordagem que simplifica a representação de edifícios e, por essa razão, é amplamente utilizado em projetos estruturais devido à sua simplicidade e à capacidade de fornecer previsões razoáveis dos comportamentos estático e dinâmico dessas estruturas. No entanto, em edifícios altos, a deformação por flexão, em vez da deformação por cisalhamento, pode tornar-se dominante, situação em que o modelo de *shear building* pode não mais representar adequadamente a estrutura (Zhang; Aoki, 2017).

Esse modelo pressupõe que toda a massa do edifício está concentrada nos níveis dos pisos, que as vigas dos pisos têm rigidez infinita e que o efeito axial dos pilares não é considerado. Assim, os deslocamentos em cada andar podem ser descritos por um único grau de liberdade translacional (Bernardes Junior; Moraes; Avila, 2017). Os pilares são, então, modelados como molas elásticas que exibem deformações apenas na direção horizontal quando submetidos a forças laterais (Zuo; He; Li, 2022).

A análise dinâmica de estruturas do tipo *shear building* tem sido amplamente investigada em pesquisas anteriores. Concha e Alvarez-Icaza (2016) propuseram uma metodologia para estimar o modelo de *shear building* com excitação sísmica e acoplamento torcional, utilizando medições de aceleração do solo e dos andares. Masaeli, Khoshnoudian e Muscician (2018) analisaram os efeitos da interação solo-estrutura não linear em estruturas de *shear building* por meio de análise dinâmica incremental, considerando o efeito P-Delta e utilizando molas não lineares e amortecedores para modelar o solo. Concha e Alvarez-Icaza (2018) também apresentaram um método de identificação de parâmetros e um observador de alto ganho, com o objetivo de validar o modelo e recuperar o estado de um *shear building* submetido a excitação sísmica, a partir das respostas de aceleração dos níveis do solo e dos pisos instrumentados.

Uma metodologia de projeto estrutural sísmico, baseada na teoria de controle ótimo, foi desenvolvida por Shmerling e Levy (2019) para *shear buildings* inelásticos, visando minimizar as acelerações absolutas máximas ao alterar apenas a massa do pavimento e a rigidez horizontal dos andares. Abad, Mahmoudi e Dowell (2020) apresentaram uma técnica computacional fundamentada nas equações de balanço de energia para realizar a análise dinâmica de *shear buildings*. Zuo, He e Li (2022) conduziram uma comparação da precisão de cinco métodos distintos de idealização, apresentando recomendações para a seleção do método mais adequado para modelos de *shear building* empregados em análises dinâmicas no domínio do tempo.

Brandão e Miguel (2023) propuseram uma abordagem para o desenvolvimento de um sistema de controle híbrido composto por amortecedores magnetorreológicos e amortecedores de massa sintonizada (AMS), visando atenuar a resposta dinâmica de um *shear building* de dez pavimentos submetido a excitações sísmicas. Souza (2024c) apresentou um modelo numérico-computacional para

analisar o comportamento dinâmico de um *shear building* equipado com um AMS, determinando os parâmetros ótimos do AMS e considerando o amortecimento estrutural pela aproximação de Rayleigh.

O efeito P-Delta é uma consideração não linear que surge quando a deformação lateral de uma estrutura sob cargas verticais induz forças adicionais que alteram o comportamento estrutural (Wilson; Eeri; Habibullah, 1987). Na presença de cargas dinâmicas, grandes deslocamentos e deformações podem ocorrer, produzindo forças e momentos adicionais que tendem a reduzir a rigidez estrutural (Montgomery, 1981; Zhang; Sun; Qu, 2022).

Esse efeito, embora frequentemente negligenciado em edifícios de menor altura, torna-se progressivamente mais relevante à medida que a altura do edifício aumenta. A magnitude dos deslocamentos laterais, combinada com as cargas verticais, gera momentos adicionais que podem intensificar as deformações na estrutura, ocasionando a amplificação dos esforços internos nos membros estruturais. A análise de segunda ordem, que considera esse efeito, é essencial para edifícios de médio e grande porte. Como os efeitos de segunda ordem surgem após o edifício sofrer deslocamentos laterais, um processo iterativo pode ser empregado para determinar o efeito P-Delta. No entanto, quando esse efeito é diretamente introduzido na matriz de rigidez, considerando forças verticais axiais constantes (forças peso), o uso de um procedimento iterativo torna-se desnecessário (Paz, 1997).

Neste trabalho, o efeito P-Delta é considerado de maneira simplificada por meio do método direto, uma abordagem aplicada na análise de estruturas de pórticos, como o *shear building*, que leva em conta o efeito de segunda ordem. Nesse método, a equação do movimento é modificada com a adição de um novo termo, que corresponde à matriz de rigidez geométrica multiplicada pelo vetor de deslocamentos (Rutenberg, 1981). A matriz de rigidez geométrica é calculada com base nas forças axiais na estrutura sob cargas de gravidade apenas, ou seja, assume-se que os efeitos das forças axiais nos pilares devido aos momentos de tombamento tendem a se anular. Além disso, supõe-se que a forma defletida do pilar entre andares adjacentes é praticamente reta, de modo que nenhum momento adicional é induzido pelas forças axiais (Paz, 1997).

Neste contexto, o presente artigo visa apresentar um modelo numérico-computacional para a análise dinâmica transiente e modal de *shear buildings*, considerando o efeito P-Delta. Na obtenção da matriz de rigidez material, a rigidez dos pilares é avaliada considerando a influência da deformação por cisalhamento, a qual é descrita por um fator de correção de rigidez (Souza, 2024b). Esse fator depende do coeficiente de Poisson e das dimensões da seção transversal (Silva, 2022).

O amortecimento estrutural é modelado pelo método de Rayleigh, em que a matriz de amortecimento é uma função linear das matrizes de massa e de rigidez da estrutura. Os coeficientes de Rayleigh são determinados a partir da taxa de amortecimento e das duas primeiras frequências naturais da estrutura (Ryan; Polanco, 2008). Além da simplicidade, uma grande vantagem do amortecimento de Rayleigh é a geração de uma matriz de amortecimento global com características de esparsidade semelhantes às da matriz de rigidez (Soriano, 2014).

Simulações numéricas de dois problemas de *shear building* encontrados na literatura são realizadas para validar o código computacional implementado no programa livre Scilab, versão 2024.1.0 (Scilab, 2024). A solução da equação diferencial de segunda ordem, que governa o problema dinâmico linear, é obtida por meio do método implícito de integração temporal direta de Newmark – Aceleração Média Constante (Bathe, 2016). No que diz respeito à análise modal, as frequências naturais dos sistemas estruturais em análise são determinadas pela função *spec* do software Scilab.

O restante deste artigo está organizado em cinco seções. Na Seção 2, são discutidos a formulação do modelo de *shear building* com a inclusão do efeito P-Delta e da deformação de cisalhamento no cálculo da rigidez do pilar, bem como o método implícito de integração direta de Newmark para a solução da equação do movimento. A Seção 3 apresenta detalhes da implementação computacional do modelo numérico proposto no software livre Scilab. Os resultados numéricos das análises modal e transiente de dois problemas de *shear building* encontrados na literatura são expostos na Seção 4. Finalmente, a Seção 5 sintetiza os resultados obtidos e apresenta as conclusões do estudo.

## 2 Referencial teórico

Nesta seção, desenvolve-se o embasamento teórico para a simulação numérica de estruturas do tipo *shear building*, com ênfase nos efeitos de segunda ordem (P-Delta), no amortecimento estrutural de Rayleigh e na consideração da deformação por cisalhamento no cálculo da rigidez dos pilares. A formulação da equação do movimento que rege o comportamento dinâmico da estrutura é apresentada. Para a solução numérica dessa equação, descreve-se o método implícito de Newmark. Além disso, discute-se a análise modal, a qual permite determinar as características vibracionais da estrutura, como as frequências naturais e os modos de vibração associados.

## 2.1 Equação do movimento e método de solução

A análise dinâmica de estruturas requer a solução das equações de movimento que descrevem o comportamento dinâmico da estrutura. Isso pode ser realizado por meio de métodos de integração direta, que podem ser classificados como implícitos ou explícitos. Os algoritmos explícitos apresentam estabilidade condicional, exigindo intervalos de tempo reduzidos para manter essa condição, sendo mais adequados para problemas de curta duração. Nos métodos implícitos, a equação dinâmica é transformada em um sistema estático equivalente, de modo que o deslocamento, a velocidade e a aceleração satisfaçam simultaneamente o equilíbrio dinâmico. Esse procedimento permite obter resultados precisos e utilizar um incremento de tempo maior na análise transiente. A resolução de grandes sistemas de equações algébricas a cada passo de tempo implica em um custo computacional diretamente proporcional à quantidade de graus de liberdade do sistema estrutural em análise (Rezaiee-Pajand; Alamatian, 2008).

A equação diferencial ordinária de segunda ordem que descreve um sistema estrutural em termos dos deslocamentos nodais é dada por (Cook; Malkus; Plesha, 1989):

$$K u + C \dot{u} + M \ddot{u} - F_{ext} = 0 \quad (1)$$

Na Equação 1,  $K$  representa a matriz de rigidez,  $C$  é a matriz de amortecimento,  $M$  é a matriz de massa,  $u$  é o vetor de deslocamento horizontal,  $\dot{u}$  é o vetor de velocidade,  $\ddot{u}$  é o vetor de aceleração, e  $F_{ext}$  é o vetor de forças externas aplicadas em função do tempo  $t$ . A solução aproximada do sistema representado pela Equação 1, cujas incógnitas são  $u$ ,  $\dot{u}$  e  $\ddot{u}$ , é obtida por meio de um esquema de integração numérica implícita. O método de Newmark é amplamente utilizado para essa finalidade na dinâmica estrutural. Para iniciar o método, o vetor  $\ddot{u}$  no tempo  $t = 0$  é determinado por (Kim, 2020; Souza, 2024b):

$$\ddot{u}(0) = M^{-1} [F_{ext}(0) - C \dot{u}(0) - K u(0)] \quad (2)$$

Para o instante de tempo atual ( $t + \Delta t$ ), as expressões de Newmark para o deslocamento  $u$  e a velocidade  $\dot{u}$  são dadas, respectivamente, por:

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \Delta t \dot{u}^t + \Delta t^2 \left[ \left( \frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{u}^t + \beta \ddot{u}^{t+\Delta t} \right] \quad (3)$$

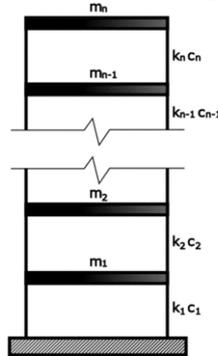
$$\dot{u}^{t+\Delta t} = \dot{u}^t + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \ddot{u}^t + \gamma \ddot{u}^{t+\Delta t} \right] \quad (4)$$

em que  $\beta$  e  $\gamma$  são constantes do método de Newmark e  $\Delta t$  é o intervalo de tempo. Existem diversas particularizações do método de Newmark dependendo dos valores atribuídos a essas constantes (Bathe, 2016).

## 2.2 Determinação das frequências naturais e modos de vibração

Considera-se um edifício do tipo *shear building* com  $n$  pavimentos, conforme ilustrado na Figura 1, onde as massas estão concentradas no nível de cada pavimento e são conectadas por elementos que representam a rigidez e o amortecimento dos pilares.

Figura 1 – Modelo do *shear building* com  $n$  pavimentos



Fonte: adaptada de Yanik e Ulus (2023)

As matrizes de massa  $\mathbf{M}$ , amortecimento  $\mathbf{C}$ , e rigidez material  $\mathbf{K}$  da estrutura tipo *shear building* são dadas, respectivamente, por (Yanik; Ulus, 2023):

$$\mathbf{M} = \text{diag}[m_1 \ m_2 \ \dots \ m_{n-1} \ m_n] \quad (5)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 & \dots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 & \dots & 0 \\ 0 & -c_3 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & c_{n-1} + c_n & -c_n \\ 0 & 0 & 0 & -c_n & c_n \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 & \dots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 & \dots & 0 \\ 0 & -k_3 & \ddots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & k_{n-1} + k_n & -k_n \\ 0 & 0 & 0 & -k_n & k_n \end{bmatrix} \quad (7)$$

onde  $k_i$ ,  $m_i$ , e  $c_i$  representam, respectivamente, a rigidez, massa e amortecimento do pavimento  $i$ . Na Equação 5,  $\text{diag}[]$  indica uma matriz diagonal cujos elementos estão dentro dos colchetes.

A massa  $m_i$  de cada pavimento é obtida pela soma das massas dos pilares, vigas e lajes correspondentes. Os pilares são considerados engastados entre os pavimentos (Pozo; Farina, 1991), e a rigidez de cada pilar  $k_{pilar}$  é dada por (Souza, 2024b):

$$k_{pilar} = \frac{12EI}{(1 + \Phi)L_{pilar}^3} \quad (8)$$

onde  $E$  é o módulo de elasticidade longitudinal,  $I$  é o momento de inércia, e  $L_{pilar}$  é o comprimento do pilar. O fator  $(1 + \Phi)$  corrige o cálculo da rigidez, levando em conta o efeito da deformação por cisalhamento. Esse fator é mais relevante para pilares de grandes dimensões, onde o esforço de cisalhamento se torna significativo (Pozo; Farina, 1991). O fator de correção da rigidez  $\Phi$  é dado por:

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_s L_{\text{pilar}}^2} \quad (9)$$

onde  $G$  o módulo de cisalhamento transversal e  $A_s$  é a área de cisalhamento da seção transversal, que, no caso de seções retangulares, é dada por:

$$A_s = \kappa bh \quad (10)$$

em que  $b$  e  $h$  são as dimensões da seção do pilar, e  $\kappa$  é o coeficiente de cisalhamento. Para seções retangulares,  $\kappa$  assume o valor (Silva, 2022):

$$\kappa = \frac{10(1 + \nu)}{12 + 11\nu} \quad (11)$$

onde  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Os valores de rigidez  $k_i$  de cada pavimento são calculados por:

$$k_i = n_{\text{pilar}} k_{\text{pilar}} \quad (12)$$

sendo  $n_{\text{pilar}}$  o número de pilares no pavimento e  $k_{\text{pilar}}$  a rigidez de um pilar determinada conforme a Equação 8.

A resposta dinâmica de um *shear building* resulta da interação entre suas propriedades geométricas e materiais. A distribuição de massa ao longo da altura influencia significativamente as frequências naturais e os modos de vibração, enquanto o módulo de elasticidade e a densidade dos materiais determinam a rigidez e a massa da estrutura. O amortecimento estrutural, por sua vez, dissipa energia durante as vibrações, reduzindo as amplitudes e prolongando a vida útil da estrutura (Chopra, 2012).

### 2.3 Amortecimento de Rayleigh

A matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ , utilizando a formulação de Rayleigh, é obtida por meio de uma combinação linear das matrizes de massa  $\mathbf{M}$  e de rigidez  $\mathbf{K}$  (Ryan; Polanco, 2008; Souza, 2024b):

$$\mathbf{C} = \mu_0 \mathbf{M} + \mu_1 \mathbf{K} \quad (13)$$

onde  $\mu_0$  e  $\mu_1$  são coeficientes selecionados para especificar a razão de amortecimento modal em dois modos. Esses coeficientes são dados por (Ryan; Polanco, 2008):

$$\mu_0 = 2\zeta \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (14)$$

$$\mu_1 = \zeta \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (15)$$

onde  $\zeta$  é a taxa de amortecimento, e  $\omega_i$  e  $\omega_j$  são as frequências naturais da estrutura, comumente referentes ao primeiro modo e a um modo de frequência mais alta, respectivamente, para limitar o amortecimento dentro da faixa de frequência que engloba a maior parte da distribuição modal.

A principal vantagem do amortecimento de Rayleigh, além da simplicidade, é a geração de uma matriz de amortecimento global com padrão esparsa, semelhante ao da matriz de rigidez (Soriano, 2014). Variações simplificadas do amortecimento de Rayleigh incluem o amortecimento proporcional à rigidez ( $\mu_0 = 0$ ) e o amortecimento proporcional à massa ( $\mu_1 = 0$ ), os quais permitem especificar a razão de amortecimento em apenas um modo (Ryan; Polanco, 2008).

No caso do amortecimento proporcional somente à massa, cada elemento da estrutura possui um amortecedor viscoso proporcional à sua massa, e a dissipação de energia está diretamente relacionada à velocidade do movimento. No amortecimento proporcional somente à rigidez, cada elemento da estrutura possui um amortecedor viscoso proporcional à sua rigidez, e a dissipação de energia está associada à deformação do elemento.

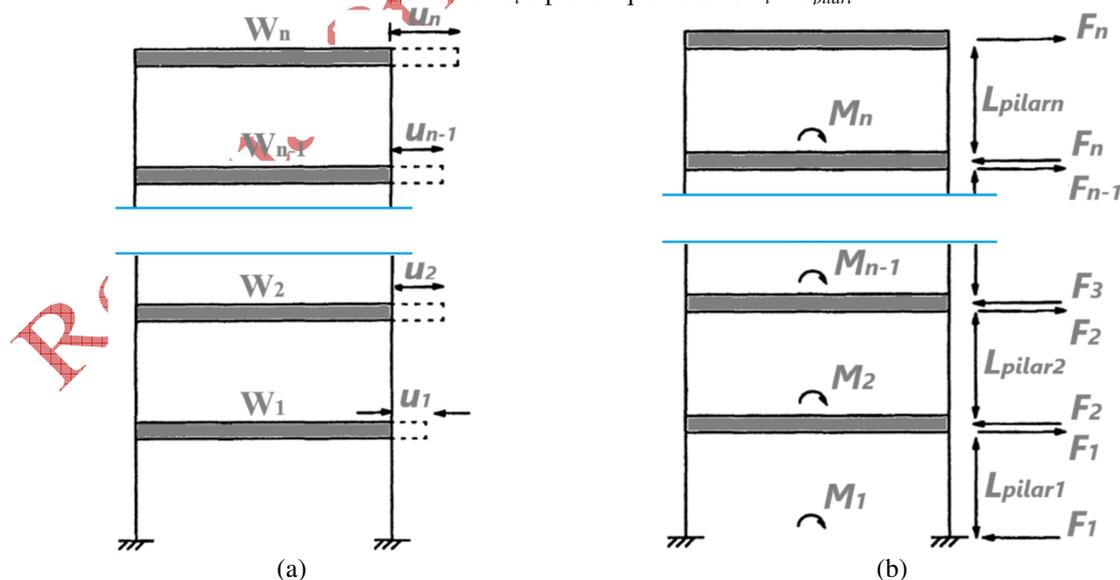
O modelo de amortecimento proporcional, ou de Rayleigh, apresenta algumas limitações, tais como: a matriz de amortecimento, definida como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez, pode não ser precisa para todos os sistemas estruturais; a dificuldade de modelar o amortecimento concentrado em elementos específicos da estrutura; e a precisão do modelo, que depende da escolha dos modos de vibração utilizados para determinar os coeficientes  $\mu_0$  e  $\mu_1$  (Dias, 2015).

## 2.4 Efeito P-Delta

Na análise de sistemas estruturais sujeitos a deslocamentos laterais, o deslocamento da massa estrutural para uma posição deformada gera momentos de segunda ordem, um fenômeno conhecido como efeito P-Delta. Esses momentos de tombamento adicionais no edifício são proporcionais ao produto dos pesos dos pavimentos  $P$  e dos deslocamentos laterais  $\Delta$  (Wilson; Eeri; Habibullah, 1987).

O problema é linearizado, e a solução é obtida de maneira direta, sem a necessidade de iterações, uma vez que o momento total em um determinado pavimento é igual ao peso do edifício acima daquele nível multiplicado pelo deslocamento no mesmo. Este valor não se altera durante a aplicação de cargas laterais. Para considerar o efeito P-Delta, o momento gerado é convertido em forças laterais equivalentes, como ilustrado na Figura 2. Nessa figura,  $W_i$ ,  $L_{pilar_i}$  e  $u_i$  correspondem ao peso, à altura do pilar e ao deslocamento horizontal do andar  $i$ , respectivamente, sendo  $i = 1, 2, \dots, n$ .

Figura 2 – *Shear building* com  $n$  andares mostrando: (a) deslocamentos laterais  $u_i$ ; e (b) momentos de tombamento  $M_i$  e pares equivalentes  $F_i \times L_{pilar_i}$ .



Fonte: adaptado de Paz (1997)

As forças laterais atuantes em cada pavimento são incorporadas ao modelo estrutural como cargas externas adicionais. A formulação matemática para a análise dinâmica, seguindo Paz (1997) e Wilson, Eeri e Habibullah (1987), inclui essas forças na equação do movimento conforme:

$$\mathbf{K}\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{ext} + \mathbf{K}_g\mathbf{u} \quad (16)$$

$$\mathbf{K}^*\mathbf{u} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_{ext} \quad (17)$$

onde  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \mathbf{K}_g$ , e  $\mathbf{K}_g$  é a matriz de rigidez geométrica, que contém os termos referentes aos pesos dos pavimentos. Para obter a matriz  $\mathbf{K}_g$ , Paz (1997) propõe um sistema de cargas estaticamente equivalente, onde o momento  $M_i$  no pavimento  $i$  é dado por:

$$M_i = P_i(u_i - u_{i-1}) \quad (18)$$

em que  $P_i$  é o peso total acima do nível  $i$ , tal que:

$$P_i = \sum_{j=i}^n W_j \quad (19)$$

Os momentos de segunda ordem  $M_i$  na Equação 18 podem ser substituídos por pares de forças laterais equivalentes de magnitude igual aos momentos de tombamento mostrados na Figura 2, expressos por:

$$M_i = F_i L_{pilari} \quad (20)$$

Isolando o termo  $F_i$  na Equação 20 e utilizando a Equação 18, obtém-se:

$$F_i = \frac{M_i}{L_{pilari}} = \frac{P_i}{L_{pilari}}(u_i - u_{i-1}) \quad (21)$$

com  $u_0 = 0$ . A força  $q_i$  no pavimento  $i$  é então obtida por:

$$q_i = F_i - F_{i+1} \quad (22)$$

A Equação 22 pode ser expressa de forma matricial como:

$$\mathbf{q} = \mathbf{K}_g\mathbf{u} \quad (23)$$

onde  $\mathbf{K}_g$  é a matriz de rigidez geométrica do *shear building* com  $n$  pavimentos, conforme definida por Rutenberg (1981) e Paz (1997). A matriz  $\mathbf{K}_g$  é matematicamente descrita como:

$$\mathbf{K}_g = \begin{bmatrix} \frac{P_1}{L_{pilar1}} + \frac{P_2}{L_{pilar2}} & -\frac{P_2}{L_{pilar2}} & \dots & 0 \\ -\frac{P_2}{L_{pilar2}} & \frac{P_2}{L_{pilar2}} + \frac{P_3}{L_{pilar3}} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \frac{-P_n}{L_{pilarn}} \\ 0 & 0 & \frac{-P_n}{L_{pilarn}} & \frac{P_n}{L_{pilarn}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Por definição, os termos  $P_i$  são baseados apenas nas cargas gravitacionais, considerando que os efeitos das forças axiais que causam momentos nos pilares tendem a se anular mutuamente. Assim, as forças peso em cada pavimento são dadas por:

$$P_i = g \sum_{j=i}^n m_j \quad (25)$$

sendo  $g$  a aceleração da gravidade, cujo valor é aproximadamente  $9,806 \text{ m/s}^2$ .

## 2.5 Determinação das frequências naturais e modos de vibração

As frequências naturais da estrutura são obtidas a partir da equação do movimento descrita pela Equação 17, desconsiderando o efeito do amortecimento ( $\mathbf{C} = \mathbf{0}$ ) e assumindo vibração livre ( $\mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0}$ ). Assim, a equação é reescrita em termos das matrizes de massa  $\mathbf{M}$  e de rigidez  $\mathbf{K}^*$  (Chung; Yoo, 2002):

$$\mathbf{K}^* \mathbf{u} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (26)$$

Uma das soluções da Equação 26 permite expressar o vetor deslocamento  $\mathbf{u}$  na forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{\Gamma} \text{sen}(\omega t) \quad (27)$$

onde  $\mathbf{\Gamma}$  é o autovetor correspondente ao modo de vibração e  $\omega$  é o autovalor que representa uma frequência natural do sistema. Assim, o problema de autovalor e autovetor pode ser expresso como:

$$\mathbf{K}^* \mathbf{\Gamma} \text{sen}(\omega t) - \mathbf{M} \mathbf{\Gamma} \omega^2 \text{sen}(\omega t) = \mathbf{0} \quad (28)$$

$$\mathbf{K}^* \mathbf{\Gamma} \text{sen}(\omega t) = \mathbf{M} \mathbf{\Gamma} \omega^2 \text{sen}(\omega t) \quad (29)$$

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}^* \mathbf{\Gamma} \text{sen}(\omega t) = \mathbf{I} \mathbf{\Gamma} \omega^2 \text{sen}(\omega t) \quad (30)$$

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}^* \mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma} \omega^2 \quad (31)$$

onde  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade.

O fenômeno de ressonância ocorre em um grande número de aplicações que envolvem vibrações, manifestando-se quando a frequência de excitação se iguala à frequência natural do sistema mecânico, o que pode ocasionar danos às estruturas (Bentes, 2020; Varanis; Silva; Mereles, 2018). Dessa forma, é necessário que se realize um estudo prévio das frequências naturais de vibração da

estrutura durante a fase de projeto. A ocorrência desse fenômeno pode levar à amplificação dos deslocamentos e das tensões, comprometendo a segurança e o desempenho da estrutura.

### 3 Método da pesquisa

O modelo numérico-computacional de *shear building*, descrito na Seção 2, foi implementado no programa Scilab, versão 2024.1.0 (Scilab, 2024). O Scilab é uma ferramenta gratuita para computação numérica, amplamente disponível para *download* via internet<sup>1</sup>. Esse ambiente computacional oferece um espaço aberto e robusto para aplicações científicas, podendo ser utilizado como um terminal matemático interativo (Maia-Afonso; Dias, 2020; Souza, 2024a).

A solução do sistema de equações diferenciais de segunda ordem, representado pela Equação 17, é obtida por meio do método de integração direta implícito da Aceleração Média Constante. O pseudocódigo desse método é apresentado na Figura 3. O método da Aceleração Média Constante (também denominado Regra Trapezoidal) é um método de passo único, não dissipativo e pertencente à família de aproximações de Newmark. Em geral, esse método é eficaz para análises lineares e estabelece o equilíbrio dinâmico apenas nos tempos discretos considerados (Kim; Choi, 2018).

Esse método utiliza duas constantes:  $\beta = 1/4$  e  $\gamma = 1/2$ . Com a adoção dessas constantes, obtém-se um algoritmo incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem (Bathe, 2016). No entanto, a Regra Trapezoidal pode se tornar instável em algumas análises não lineares se forem utilizados passos de tempo inapropriadamente grandes (Chen *et al.*, 2022).

Figura 3 – Pseudocódigo do método da Aceleração Média Constante

|   |
|---|
| <p>1. Cálculos iniciais (passo de tempo <math>t = 0</math>):</p> <p>1.1 <math>\ddot{\mathbf{u}}^0 \leftarrow \mathbf{M}^{-1}(\mathbf{F}_{\text{ext}}^0 - \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}^0 - \mathbf{K}^*\mathbf{u}^0)</math></p> <p>1.2 Selecionar <math>\Delta t</math></p> <p>1.3 <math>\mathbf{a}_1 \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{C}</math>    <math>\mathbf{a}_2 \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t}\mathbf{M} + \left(\frac{\gamma}{\beta} - 1\right)\mathbf{C}</math>    <math>\mathbf{a}_3 \leftarrow \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\mathbf{M} + \Delta t\left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1\right)\mathbf{C}</math></p> <p>1.4 <math>\mathbf{K}_{ef} \leftarrow \mathbf{K}^* + \mathbf{a}_1</math></p> <p>2. Cálculos para cada passo de tempo, com <math>i = 0, 1, 2, \dots</math></p> <p>2.1 <math>\mathbf{F}_{ef}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{ext}}^{(i+1)} + \mathbf{a}_1\mathbf{u}^{(i)} + \mathbf{a}_2\dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \mathbf{a}_3\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}</math></p> <p>2.2 <math>\mathbf{u}^{(i+1)} \leftarrow \mathbf{K}_{ef}^{-1}\mathbf{F}_{ef}^{(i+1)}</math></p> <p>2.3 <math>\dot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \leftarrow \frac{\gamma}{\beta\Delta t}(\mathbf{u}^{(i+1)} - \mathbf{u}^{(i)}) + \left(1 - \frac{\gamma}{\beta}\right)\dot{\mathbf{u}}^{(i)} + \Delta t\left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}</math></p> <p>2.4 <math>\ddot{\mathbf{u}}^{(i+1)} \leftarrow \frac{1}{\beta\Delta t^2}(\mathbf{u}^{(i+1)} - \mathbf{u}^{(i)}) - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{u}}^{(i)} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right)\ddot{\mathbf{u}}^{(i)}</math></p> <p>3. Repetir para o próximo passo de tempo. Relocar <math>i</math> por <math>i+1</math> e implementar passos 2.1 a 2.4 para o próximo passo de tempo.</p> |
|---|

Fonte: Bathe (2016)

Para inicializar a análise linear transiente com o pseudoalgoritmo descrito na Figura 3, considera-se no tempo  $t = 0$  o vetor de deslocamentos horizontais  $\mathbf{u}^0 = \mathbf{0}$  e o vetor velocidade  $\dot{\mathbf{u}}^0 = \mathbf{0}$ . O vetor aceleração  $\ddot{\mathbf{u}}^0$  no passo de tempo inicial é determinado conforme o item 1.1 do pseudocódigo.

Os parâmetros de entrada para o pseudocódigo incluem: incremento de tempo ( $\Delta t$ ); o tempo total de análise ( $t_{\text{máx}}$ ); o vetor de deslocamentos  $\mathbf{u}^0$  no instante  $t = 0$ ; o vetor velocidade  $\dot{\mathbf{u}}^0$  no instante  $t = 0$ ; as constantes de Newmark  $\gamma$  e  $\beta$ ; a matriz de massa ( $\mathbf{M}$ , Equação 5); a matriz de

<sup>1</sup> Scilab. Disponível em: <http://www.scilab.org>

amortecimento de Rayleigh ( $\mathbf{C}$ , Equação 6); a matriz de rigidez material ( $\mathbf{K}$ , Equação 7); a matriz de rigidez geométrica ( $\mathbf{K}_g$ , Equação 23); e o vetor de cargas dinâmicas ( $\mathbf{F}_{ext}$ ). As saídas do método incluem: o vetor de deslocamento ( $\mathbf{u}$ ); o vetor de velocidade ( $\dot{\mathbf{u}}$ ); e o vetor de aceleração ( $\ddot{\mathbf{u}}$ ).

Como a análise dinâmica é linear, a matriz de rigidez efetiva  $\mathbf{K}_{ef}$  (item 1.4 do pseudocódigo) permanece inalterada ao longo dos passos de tempo, uma vez que as matrizes de rigidez  $\mathbf{K}$ , de massa  $\mathbf{M}$  e de amortecimento  $\mathbf{C}$  são assumidas constantes. Para a resolução do sistema de equações lineares (item 2.2 do pseudocódigo), utiliza-se o método direto Fatoração LU. Essa técnica numérica apresenta diversas vantagens em relação a outros métodos quanto à eficiência computacional e à estabilidade numérica. A matriz  $\mathbf{K}_{ef}$  é fatorada apenas uma vez, e a mesma fatoração LU é utilizada para resolver esse sistema em cada passo de tempo. Em geral, a fatoração LU requer menos operações aritméticas do que outros métodos, como a eliminação de Gauss com pivoteamento (Golub; Van Loan, 2012).

A eficiência numérica dessa resolução pode ser otimizada por meio de algoritmos que armazenam apenas os coeficientes não nulos da matriz, realizando operações exclusivamente entre esses coeficientes. Isso evita a execução de cálculos redundantes envolvendo elementos nulos. As linhas de código para a resolução do sistema de equações lineares são apresentadas na Figura 4. A função  $Kef = sparse(Kef)$  foi utilizada para criar uma matriz esparsa, armazenando apenas as entradas não nulas. A função  $[hand, rk] = lufact(Kef)$  executa a fatoração LU esparsa, enquanto a função  $u = lusolve(Kef, Fef)$  resolve o sistema de equações. As funções  $sparse$  e  $lufact$  podem ser executadas antes do *loop* descrito no item 2 do pseudocódigo na Figura 3.

Figura 4 – Linhas de código para a resolução do sistema de equações lineares

```
Kef = sparse(Kef)
[hand,rk] = lufact(Kef)
u = lusolve(Kef,Fef)
```

Fonte: elaborada pelos autores (2024)

No programa Scilab, a função  $spec$  é utilizada para calcular os autovalores e autovetores de uma matriz, sendo especialmente útil na análise modal de sistemas dinâmicos, como estruturas e modelos de *shear building*. Essa função permite obter as frequências naturais e os modos de vibração de uma estrutura, considerando a matriz de massa e a matriz de rigidez. Na análise de vibração de estruturas, os autovalores estão associados às frequências naturais do sistema, enquanto os autovetores representam os modos de vibração correspondentes.

Para o cálculo das frequências naturais da estrutura, foi utilizada a linha de código  $frequencia = sqrt(spec(A))$  no programa computacional, que retorna a raiz quadrada dos autovalores em rad/s. O parâmetro de entrada,  $A$ , refere-se ao produto matricial  $\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}^*$ . Ressalta-se que, caso o efeito P-Delta não seja considerado na análise transiente, a matriz  $\mathbf{K}_g = \mathbf{0}$  e, portanto,  $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}$ .

As computações de autovalores de matrizes pela função  $spec$  são baseadas nas rotinas LAPACK (Linear Algebra Package). O LAPACK é uma biblioteca padrão para álgebra linear numérica, que oferece algoritmos altamente otimizados e robustos para uma variedade de problemas, incluindo o cálculo de autovalores. Sua ampla adoção na comunidade científica garante que a função  $spec$  se beneficie de décadas de pesquisa e desenvolvimento.

Os seguintes resultados numéricos foram obtidos nas simulações computacionais: no Console do Scilab, as frequências naturais e a amplitude máxima da análise transiente foram exibidas pela função  $disp$ ; além disso, uma janela gráfica foi gerada, contendo o gráfico tempo *versus* deslocamento, esboçado pela função  $plot$ .

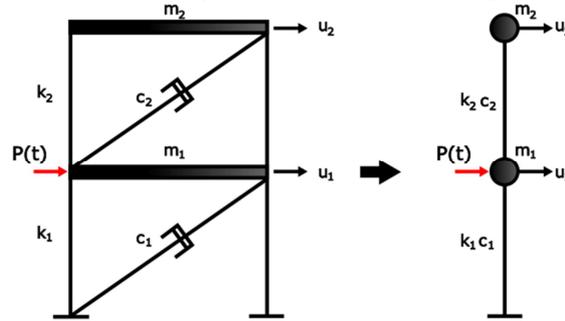
## 4 Resultados e discussões

Esta seção apresenta os resultados das análises realizadas e discute as principais observações relacionadas aos problemas estudados. As subseções a seguir detalham cada problema analisado.

### 4.1 Problema 1 - *Shear building* com dois pavimentos

Neste estudo, foi utilizado um modelo de *shear building* com dois pavimentos, submetido a um carregamento senoidal aplicado no primeiro pavimento, conforme ilustrado na Figura 5. Este problema foi adaptado de Vaz (2011). Para as análises dinâmicas, os comprimentos dos pilares foram considerados iguais  $L_{pilar1} = L_{pilar2} = 2,507$  m, sendo que a deformação por cisalhamento não foi incluída no cálculo da rigidez dos pilares.

Figura 5 – Modelo estrutural e equivalente do *shear building* com dois pavimentos



Fonte: adaptado de Souza (2024b)

Na Figura 5, observa-se que, em cada pavimento  $i$ ,  $m_i$  representa a massa total do pavimento,  $c_i$  é o coeficiente de amortecimento e  $k_i$  é o coeficiente de rigidez. A força dinâmica  $P(t)$  é aplicada no primeiro pavimento, sendo dada pela Equação 32:

$$P(t) = p_0 \text{sen}(w_0 t) \quad (32)$$

onde  $p_0$  é a amplitude de força de excitação,  $w_0$  é a frequência da força de excitação e  $t$  é o tempo. Vaz (2011) adotou os parâmetros de acordo com a Tabela 1.

Tabela 1 – Parâmetros do *shear building* com dois pavimentos

| Parâmetro   | Valor           | Unidade          |
|-------------|-----------------|------------------|
| $E$         | $2 \times 10^8$ | N/m <sup>2</sup> |
| $p_0$       | 2               | N                |
| $w_0$       | 0,2             | rad/s            |
| $m_1$       | 1000            | kg               |
| $m_2$       | 800             | kg               |
| $k_1 = k_2$ | $4 \times 10^4$ | N/m              |
| $\zeta$     | 10              | %                |

Fonte: Vaz (2011)

As matrizes de massa  $M$  e rigidez  $K$  são expressas, respectivamente, por:

$$M = \begin{bmatrix} 1000 & 0 \\ 0 & 800 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$K = 10^4 \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix} \quad (34)$$

As frequências naturais da estrutura em análise são apresentadas na Tabela 2.

Tabela 2 – Frequências naturais da estrutura sem o efeito P-Delta

| Frequências        | Vaz (2011) | Função <i>spec</i> |
|--------------------|------------|--------------------|
| $\omega_i$ (rad/s) | 4,223      | 4,222569           |

| $\omega_j$ (rad/s) | 10,591 | 10,591029 |
|--------------------|--------|-----------|
|--------------------|--------|-----------|

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Considerando uma taxa de amortecimento  $\zeta = 0,1$ , as constantes de Rayleigh  $\mu_0$  e  $\mu_1$  e da matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  foram calculadas, resultando em:

$$\mu_0 = 0,6037879 \quad (35)$$

$$\mu_1 = 0,0135011 \quad (36)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1683,8765 & -540,04432 \\ -540,04432 & 1023,0746 \end{bmatrix} \quad (37)$$

A matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_g$ , considerando o efeito P-Delta, é:

$$\mathbf{K}_g = \frac{9,806}{2,507} \begin{bmatrix} 1000 + 800 & -800 \\ -800 & 800 \end{bmatrix} = 10^3 \begin{bmatrix} 7,0406063 & -3,1291584 \\ -3,1291584 & 3,1291584 \end{bmatrix} \quad (38)$$

A matriz de rigidez  $\mathbf{K}^*$  da estrutura é obtida combinando as Equações (34) e (38):

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \mathbf{K}_g = 10^4 \begin{bmatrix} 7,2959394 & -3,6870842 \\ -3,6870842 & 3,6870842 \end{bmatrix} \quad (39)$$

As novas frequências naturais da estrutura, com o efeito P-Delta, estão na Tabela 3.

Tabela 3 – Frequências naturais da estrutura com o efeito P-Delta

| Frequências        | Função <i>spec</i> |
|--------------------|--------------------|
| $\omega_i$ (rad/s) | 4,0208106          |
| $\omega_j$ (rad/s) | 10,143029          |

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Na Tabela 3, observa-se que a presença do efeito P-Delta reduziu as frequências naturais do *shear building*, tornando-o mais suscetível aos efeitos dinâmicos. Como a rigidez da estrutura foi alterada com a matriz  $\mathbf{K}_g$ , foram determinadas as novas constantes de Rayleigh  $\mu_0$  e  $\mu_1$  e a nova matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ , sendo dadas, respectivamente, por:

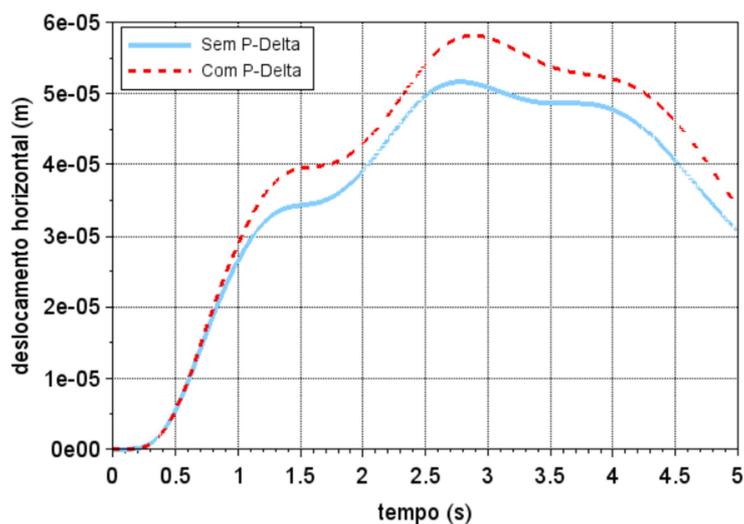
$$\mu_0 = 0,5758777 \quad (40)$$

$$\mu_1 = 0,0141205 \quad (41)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1606,0983 & -520,63344 \\ -520,63344 & 981,33561 \end{bmatrix} \quad (42)$$

A análise transiente, ou seja, a avaliação do comportamento de uma estrutura que está submetida a uma carga variável em relação ao tempo, foi realizada considerando um tempo máximo  $t_{m\acute{a}x} = 5$  s e incremento de tempo  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-4}$  s. As curvas deslocamento do último pavimento ao longo do tempo são mostradas na Figura 6.

Figura 6 – Deslocamentos da estrutura do *shear building* com dois andares



Fonte: dados da pesquisa (2024)

Observou-se que a consideração do efeito P-Delta no comportamento da estrutura resultou em maiores deslocamentos, conforme esperado. A Tabela 4 mostra a comparação dos deslocamentos máximos com e sem o efeito P-Delta.

Tabela 4 – Deslocamentos máximos do *shear building* com dois andares

| Deslocamento          | Sem P-Delta           | Com P-Delta           |
|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $u_{m\acute{a}x}$ (m) | $5,17 \times 10^{-5}$ | $5,82 \times 10^{-5}$ |

Fonte: dados da pesquisa (2024)

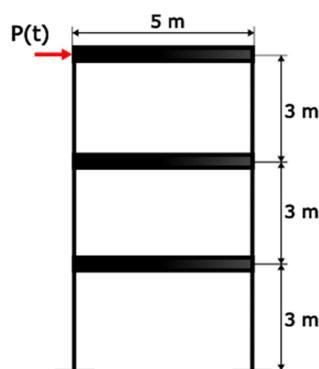
Os resultados numéricos indicaram a influência do efeito *P-Delta* no comportamento dinâmico do *shear building*, como o aumento dos deslocamentos laterais e a redução das frequências naturais. Na fase de dimensionamento de um projeto estrutural, o modelo simplificado de *shear building* possibilita uma análise estrutural mais rápida e eficiente do comportamento dinâmico da estrutura, especialmente em relação às vibrações. Se os resultados dessa análise indicarem que as deformações estão dentro dos limites admissíveis impostos por norma, pode-se concluir que a estrutura é adequada para as cargas dinâmicas consideradas. Caso contrário, torna-se necessário realizar análises mais detalhadas com modelos mais complexos.

Em edifícios altos e esbeltos, o efeito *P-Delta* pode levar a um aumento significativo dos deslocamentos. As consequências práticas desse fenômeno vão além dos aspectos estruturais e podem impactar diretamente a funcionalidade e a segurança do edifício. Como consequências estruturais desse efeito, destacam-se a instabilidade estrutural, os danos em elementos não estruturais (como instalações elétricas e hidráulicas, alvenarias, entre outros) e o aumento de recalques diferenciais nas fundações. O desconforto dos usuários devido à sensação de oscilação, as dificuldades no uso de equipamentos sensíveis (como em hospitais e laboratórios) e a perda de desempenho, afetando a estética e a funcionalidade dos espaços, são exemplos de consequências funcionais.

#### 4.2 Problema 2 - *shear building* com três pavimentos

O problema considerado é o de um *shear building* de três pavimentos, conforme apresentado por Ribeiro (2017), com uma carga dinâmica aplicada no terceiro andar, como ilustrado na Figura 6. Nesse modelo, os pilares e as lajes são compostos de concreto armado. Os valores dos parâmetros do modelo utilizados por Ribeiro (2017) estão indicados na Tabela 5.

Figura 6 – Modelo estrutural do *shear building* com três pavimentos



Fonte: adaptada de Ribeiro (2017)

Tabela 5 – Parâmetros do *shear building* com três pavimentos

| Parâmetro  | Valor           | Unidade           |
|------------|-----------------|-------------------|
| $p_0$      | $4 \times 10^7$ | N                 |
| $w_0$      | 19              | rad/s             |
| $\rho$     | 2500            | kg/m <sup>3</sup> |
| $b$        | 0,2             | m                 |
| $h$        | 0,6             | m                 |
| $e_{laje}$ | 0,15            | m                 |
| $L_{laje}$ | 6               | m                 |
| $f_{ck}$   | 30              | MPa               |
| $E$        | 30              | GPa               |
| $\nu$      | 0,2             | –                 |

Fonte: Ribeiro (2017)

A matriz de massa  $M$  foi obtida a partir do cálculo do volume das lajes e pilares de cada pavimento, multiplicado pela densidade do concreto. O resultado é a seguinte matriz de massa  $M$ :

$$M = 10^4 \begin{bmatrix} 1,305 & 0 & 0 \\ 0 & 1,305 & 0 \\ 0 & 0 & 1,215 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Ribeiro (2017) não considerou o efeito de cisalhamento no cálculo da rigidez dos pilares. Por outro lado, Souza (2024b) realizou a análise do mesmo exemplo com essa consideração. Assim, a matriz de rigidez  $K$ , incluindo o efeito do cisalhamento nos pilares, mas ainda sem o efeito P-Delta, é:

$$K = 10^8 \begin{bmatrix} 1,7241379 & -0,862069 & 0 \\ -0,862069 & 1,7241379 & -0,862069 \\ 0 & -0,862069 & 0,862069 \end{bmatrix} \quad (44)$$

As duas primeiras frequências naturais da estrutura foram calculadas com o auxílio da função *spec*, sendo os resultados apresentados na Tabela 6.

Tabela 6 – Frequências naturais da estrutura sem a consideração do efeito P-Delta

| Frequências        | Souza (2024b) | Função <i>spec</i> |
|--------------------|---------------|--------------------|
| $\omega_i$ (rad/s) | 36,865619     | 36,865619          |
| $\omega_j$ (rad/s) | 102,640322    | 102,640322         |

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Com as duas primeiras frequências naturais ( $\omega_i$  e  $\omega_j$ ) e a taxa de amortecimento  $\zeta = 0,1$ , foram determinadas as constantes  $\mu_0$  e  $\mu_1$  para a obtenção da matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ , apresentada na Equação 47.

$$\mu_0 = 5,4247138 \quad (45)$$

$$\mu_1 = 0,0014336 \quad (46)$$

$$\mathbf{C} = 10^5 \begin{bmatrix} 3,1797022 & -1,2358885 & 0 \\ -1,2358885 & 3,1797022 & -1,2358885 \\ 0 & -1,2358885 & 1,8949913 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Ao considerar o efeito P-Delta, a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_g$  foi obtida da seguinte forma

$$\mathbf{K}_g = 10^5 \begin{bmatrix} 2,073969 & -0,823704 & 0 \\ -0,823704 & 1,220847 & -0,397143 \\ 0 & -0,397143 & 0,397143 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Assim, a matriz de rigidez de segunda ordem  $\mathbf{K}^*$  é:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K} - \mathbf{K}_g = 10^8 \begin{bmatrix} 1,722064 & -0,8612453 & 0 \\ -0,8612453 & 1,7229171 & -0,8616718 \\ 0 & -0,8616718 & 0,8616718 \end{bmatrix} \quad (49)$$

As novas frequências naturais da estrutura foram calculadas novamente com o auxílio da função *spec*, como mostrado na Tabela 7.

Tabela 7 – Frequências naturais da estrutura com a consideração do efeito P-Delta

| Frequências        | Função <i>spec</i> |
|--------------------|--------------------|
| $\omega_i$ (rad/s) | 36,843873          |
| $\omega_j$ (rad/s) | 102,59601          |

Fonte: dados da pesquisa (2024)

As constantes  $\mu_0$  e  $\mu_1$  e a matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$ , considerando o efeito P-Delta, são apresentadas a seguir:

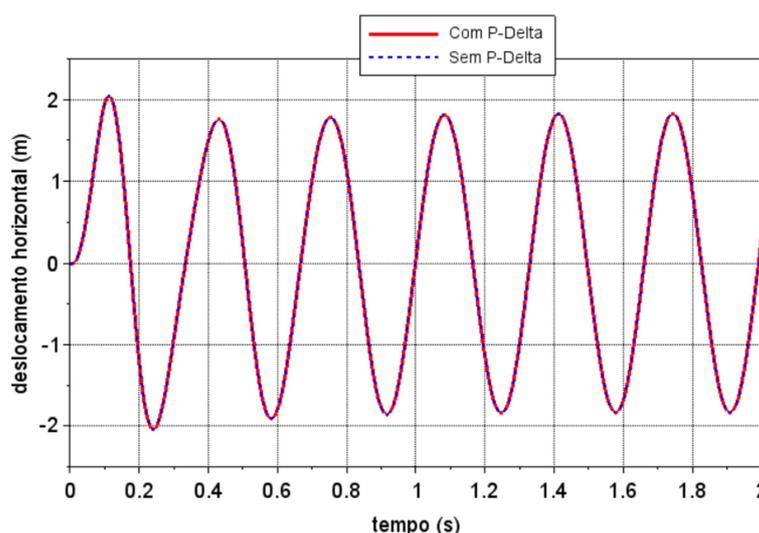
$$\mu_0 = 5,4217406 \quad (50)$$

$$\mu_1 = 0,0014343 \quad (51)$$

$$\mathbf{C} = 10^5 \begin{bmatrix} 3,1775105 & -1,2352926 & 0 \\ -1,2352926 & 3,1787342 & -1,2359044 \\ 0 & -1,2359044 & 1,8946459 \end{bmatrix} \quad (52)$$

A análise transiente foi realizada considerando o tempo máximo  $t_{m\acute{a}x} = 2$  s e o incremento de tempo  $\Delta t = 1,0 \times 10^{-3}$  s. As curvas de deslocamento no topo da estrutura em função do tempo são apresentadas na Figura 7.

Figura 7 – Deslocamentos da estrutura do *shear building* com três pavimentos



Fonte: dados da pesquisa (2024)

Verifica-se, pela Figura 7, que a consideração do efeito P-Delta teve pouca influência nos deslocamentos obtidos pela análise transiente, o que se deve à magnitude relativamente menor da matriz de rigidez geométrica em comparação à matriz de rigidez material. A Tabela 8 ilustra que os deslocamentos máximos obtidos com e sem o efeito P-Delta diferem apenas a partir da terceira casa decimal, o que indica uma diferença pouco significativa.

Tabela 8 – Deslocamentos máximos do *shear building* com três pavimentos

| Deslocamento          | Sem P-Delta | Com P-Delta |
|-----------------------|-------------|-------------|
| $u_{m\acute{a}x}$ (m) | 2,0518773   | 2,0539124   |

Fonte: dados da pesquisa (2024)

Em contextos práticos de engenharia, uma pequena diferença nos deslocamentos entre as análises com e sem o efeito *P-Delta* pode, em alguns casos, ser considerada desprezível, especialmente em estruturas mais rígidas ou com baixas intensidades de carga axial. No entanto, mesmo em estruturas nas quais a estabilidade global não esteja comprometida, o efeito *P-Delta* pode impactar o conforto dos ocupantes em edifícios altos. Pequenos aumentos nos deslocamentos laterais podem resultar em oscilações mais perceptíveis nos andares superiores, causando desconforto aos usuários.

Assim, embora essa diferença nos deslocamentos possa ser desprezível, em estruturas esbeltas, altas ou submetidas a cargas dinâmicas significativas, torna-se relevante para a segurança e o desempenho geral. Nessas circunstâncias, a consideração do efeito *P-Delta* é essencial para garantir a precisão das previsões de comportamento estrutural e evitar problemas ao longo da vida útil da edificação.

## 5 Considerações finais

Neste trabalho, foi desenvolvido um modelo numérico-computacional, utilizando o software livre Scilab, para a análise dinâmica de estruturas do tipo *shear building* considerando o efeito P-Delta. O modelo de *shear building* idealiza a estrutura como um sistema de múltiplos graus de liberdade, composto por massas concentradas em cada andar e conectadas por elementos de rigidez lateral (pilares). A abordagem numérica empregada possibilitou o estudo do comportamento da estrutura em relação aos deslocamentos laterais e às frequências naturais. Esse modelo é amplamente utilizado em projetos estruturais devido à sua simplicidade e à sua capacidade de fornecer previsões razoáveis para os comportamentos estáticos e dinâmicos de edifícios de baixa e média altura.

O efeito P-Delta nas análises dinâmicas lineares com o modelo *shear building* foi tratado de forma simplificada, por meio do método direto. Esse método consiste na modificação da equação de movimento com a inserção de um novo termo, o qual corresponde à matriz de rigidez geométrica

multiplicada pelo vetor de deslocamentos. A matriz de rigidez geométrica é calculada em função das massas dos pavimentos e da altura dos pilares correspondentes. No segundo exemplo numérico, constatou-se que, quando os valores dos termos da matriz de rigidez material são significativamente maiores do que os da matriz de rigidez geométrica, o efeito P-Delta tem pouca influência nas amplitudes de vibração da estrutura durante a análise transiente.

A aplicação do modelo de *shear building*, juntamente com a consideração do efeito P-Delta, permite prever o comportamento dinâmico de estruturas esbeltas e flexíveis de forma prática e realista. Embora simplificado, esse modelo oferece uma boa aproximação dos efeitos de segunda ordem e facilita a tomada de decisões importantes na fase de projeto, como o dimensionamento de elementos estruturais, a utilização de sistemas de controle de deslocamento e o ajuste de rigidez para prevenir problemas de instabilidade.

Apesar das vantagens evidenciadas em análises dinâmicas com o modelo de *shear building*, ele apresenta limitações. A hipótese de pisos rígidos e pilares sem flexão pode não ser adequada para todas as estruturas, especialmente aquelas com grandes vãos ou irregularidades geométricas. Além disso, o modelo não considera a distribuição de tensões em elementos individuais nem o comportamento de elementos não estruturais.

Por fim, ressalta-se a importância da análise dinâmica de edifícios submetidos a vibrações, tanto pela adequação aos limites estabelecidos por normas quanto pela prevenção de patologias estruturais decorrentes dessas vibrações, como fissuras e trincas. O desenvolvimento de diferentes métodos de análise é essencial para a tomada de decisões, sejam esses métodos mais robustos, com maior custo computacional, ou mais simples e com menor custo.

Como sugestões para pesquisas futuras sobre o *shear building*, destacam-se: o estudo de vibrações em sistemas de controle de vibração passivos, ativos, semiativos e/ou híbridos; a análise da interação solo-estrutura na fundação; a consideração da não linearidade material na rigidez dos pilares, com base na teoria da Mecânica do Dano; e a resolução da equação de movimento utilizando outros métodos de integração implícita mais precisos, como o método de dois passos de Bathe.

### Agradecimentos

Os autores agradecem à Universidade Tecnológica Federal do Paraná, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil (PCV) da Universidade Estadual de Maringá, e à Universidade Federal de Uberlândia pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.

### Financiamento

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio na execução do projeto de pesquisa e pela disponibilização de recursos computacionais da plataforma Amazon Web Services Elastic Compute Cloud Platform – Amazon AWS-EC2, conforme os números de concessão #408498/2022-6 e #421785/2022-5.

### Conflito de interesses

Os autores declaram não haver conflito de interesses.

### Contribuições ao artigo

**CARDOZO, M.:** concepção ou desenho do estudo/pesquisa. **SOUZA, L. A. F.:** análise e/ou interpretação dos dados. **MARTINS, C. H.; ROSSI, A.:** revisão final com participação crítica e intelectual no manuscrito. Todos os autores participaram da escrita, discussão, leitura e aprovação da versão final do artigo.

### Referências

ABAD, M. J. S.; MAHMOUDI, M.; DOWELL, E. Novel technique for dynamic analysis of shear frames based on energy balance equations. **Scientia Iranica – International Journal of Science & Technology**, v. 27, n. 3, p. 1091-1112, 2020. DOI: <https://doi.org/10.24200/sci.2018.20790>.

BATHE, K.-J. **Finite element procedures**. 2 ed. Watertown: Klaus-Jurgen Bathe, 2016.

BENTES, F. M. Comparação de valores de frequência natural obtidos em diferentes sistemas. **Revista Tecnológica da Universidade Santa Úrsula**, v. 2, n. 2, p. 150-155, 2020. Disponível em: <https://revistas.icesp.br/index.php/TEC-USU/article/view/864/0>. Acesso em: 25 out 2024.

BERNARDES JUNIOR, P. L.; MORAIS, M. V. G.; AVILA, S. M. Inverted pendulum damper design parameters for vibration control in tall buildings. *In: ABCM INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING*, 24., 2017, Curitiba. **Anais [...]**. Curitiba: ABCM, 2017. Disponível em: <https://www.sistema.abcm.org.br/articleFiles/download/11162>. Acesso em: 26 ago. 2024.

BRANDÃO, F. S.; MIGUEL, L. F. F. A New methodology for optimal design of hybrid vibration control systems (MR+ TMD) for buildings under seismic excitation. **Shock and Vibration**, v. 2023, 8159716, 2023. DOI: <https://doi.org/10.1155/2023/8159716>.

CHEN, Z.; HE, M.; TAO, Y.; YANG, Y. B. An efficient and robust nonlinear dynamic analysis method for framed structures using the rigid body rule. **International Journal of Structural Stability and Dynamics**, v. 22, n. 03n04, 2240001, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1142/S0219455422400016>.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of structures: theory and applications to earthquake Engineering**. Prentice Hall, 2012.

CHUNG, J.; YOO, H. H. Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. **Journal of Sound and Vibration**, v. 249, n. 1, p. 147-164, 2002. DOI: <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3856>.

COOK, R. D.; MALKUS, D. S.; PLESHA, M. E. **Concepts and applications of finite element analysis**. 3 ed. [s.l.] Wiley, 1989.

CONCHA, A.; ALVAREZ-ICAZA, L. Identification of torsionally coupled shear buildings models using a vector parameterization. **Shock and Vibration**, v. 2016, 6731928, 2016. DOI: <https://doi.org/10.1155/2016/6731928>.

CONCHA, A.; ALVAREZ-ICAZA, L. Parameter and state estimation of shear buildings using spline interpolation and linear integral filters. **Shock and Vibration**, v. 2018, 5206968, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1155/2018/5206968>.

DIAS, L. F. S. **Estudo numérico do fenômeno do amortecimento em estruturas sólidas submetidas a carregamentos impulsivos**. 2015. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2015. Disponível em: <https://repositorio.ufba.br/handle/ri/20127>. Acesso em: 06 nov 2024.

GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F. **Matrix Computations**. Johns Hopkins University Press, 2012.

KIM, W. An improved implicit method with dissipation control capability: the simple generalized composite time integration algorithm. **Applied Mathematical Modelling**, v. 81, p. 910-930, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.apm.2020.01.043>.

KIM, W.; CHOI, S. Y. An improved implicit time integration algorithm: the generalized composite time integration algorithm. **Computers & Structures**, v. 196, p. 341-354, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2017.10.002>.

MAIA-AFONSO, É. J.; DIAS, L. V. O uso do software Scilab como ferramenta para o processo de ensino-aprendizagem da disciplina de métodos numéricos nos cursos de Engenharias. **Journal of Exact Sciences – JES**, v. 25, n. 1, p. 09-17, 2020. Disponível em: [https://www.mastereditora.com.br/periodico/20200529\\_105120.pdf](https://www.mastereditora.com.br/periodico/20200529_105120.pdf). Acesso em: 26 ago. 2024.

MASAEI, H.; KHOSHNOUDIAN, F.; MUSICIAN, S. Incremental dynamic analysis of nonlinear rocking soil-structure systems. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, v. 104, p. 236-249, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2017.09.013>.

MONTGOMERY, C. J. Influence of P-Delta effects on seismic design. **Canadian Journal of Civil Engineering**, v. 8, n. 1, p. 31-43, 1981. DOI: <https://doi.org/10.1139/181-005>.

OLIVEIRA, F. S.; BRITO, J. L. V; AVILA, S. M. Design criteria for a pendulum absorber to control high building vibrations. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON VIBRATION PROBLEMS, 11., 2013, Lisboa. **Anais [...]**. Lisboa: ICoEV, 2013. Disponível em: [https://icoev.org/proceedings2013/471\\_paper0.pdf](https://icoev.org/proceedings2013/471_paper0.pdf). Acesso em: 26 ago. 2024.

PAZ, M. **Structural dynamics: theory and computation**. 4 ed. Boston: Kluwer Academic, 1997.

POZO, J. P. D.; FARINA, H. S. **Análisis dinámico de edificios**. 2 ed. [s.l.] American Concrete Institute, Capítulo Peruano, 1991.

RAHIMI, F.; AGHAYARI, R.; SAMALI, B. Application of tuned mass dampers for structural vibration control: a state-of-the-art review. **Civil Engineering Journal**, v. 6, n. 8, p. 1622-1651, 2020. DOI: <https://doi.org/10.28991/cej-2020-03091571>.

REZAIIEE-PAJAND, M.; ALAMATIAN, J. Implicit higher-order accuracy method for numerical integration in dynamic analysis. **Journal of Structural Engineering**, v. 134, n. 6, p. 973-985, 2008. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2008\)134:6\(973\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:6(973)).

RIBEIRO, R. R. **Análise modal de um shear building sob carregamento senoidal**. Brasília: Universidade de Brasília, Brasília 2017. DOI: <http://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.12113.02402>.

RUTENBERG, A. A direct P-delta analysis using standard plane frame computer programs. **Computers & Structures**, v. 14, n. 1-2, p. 97-102, 1981. DOI: [https://doi.org/10.1016/0045-7949\(81\)90088-2](https://doi.org/10.1016/0045-7949(81)90088-2).

RYAN, K. L.; POLANCO, J. Problems with Rayleigh damping in base-isolated buildings. **Journal of Structural Engineering**, v. 134, n. 11, p. 1780-1784, 2008. DOI: [https://doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(2008\)134:11\(1780\)](https://doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(2008)134:11(1780)).

SCILAB, versão 2024.1.0. Dassault Systèmes, 2024.

SHMERLING, A.; LEVY, R. Seismic structural design methodology for inelastic shear buildings that regulates floor accelerations. **Engineering Structures**, v. 187, p. 428-443, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2019.02.062>.

SILVA, T. C. Análise das teorias de viga de Bernoulli e Timoshenko para vigas em diferentes condições de contorno. **Engenharia Civil UM**, n. 62, p. 45-54, 2022. DOI: <https://doi.org/10.21814/ecum.4491>.

SORIANO, H. L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

SOUZA, L. A. F. Modelo numérico-computacional para a análise modal e transiente de *shear building* utilizando o programa Scilab. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 46, e20240014, 2024a. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2024-0014>.

SOUZA, L. A. F. Análise modal e transiente de *shear building* considerando o amortecimento de Rayleigh e o efeito do cisalhamento. **Journal of Exact Sciences – JES**, v. 41, n. 1, p. 05-13, 2024b. Disponível em: [https://www.mastereditora.com.br/periodico/20240413\\_205218.pdf](https://www.mastereditora.com.br/periodico/20240413_205218.pdf). Acesso em: 26 ago. 2024.

SOUZA, L. A. F. Análise modal e transiente de *shear building* com o sistema passivo AMS. **Journal of Exact Sciences – JES**, v. 42, n. 2, p. 11-20, 2024c. Disponível em: [https://www.mastereditora.com.br/periodico/20240818\\_165619.pdf](https://www.mastereditora.com.br/periodico/20240818_165619.pdf). Acesso em: 15 out. 2024.

VARANIS, M.; SILVA, A. L.; MERELES, A. G. On mechanical vibration analysis of a multi degree of freedom system based on arduino and MEMS accelerometers. **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 40, n. 1, e1304, 2018. DOI: <https://doi.org/10.1590/1806-9126-RBEF-2017-0101>.

VAZ, L. E. **Método dos elementos finitos em análise de estruturas**. Rio de Janeiro: Elsevier, 2011.

WILSON, E. L.; EERI, M.; HABIBULLAH, A. Static and dynamic analysis of multi-story buildings, including P-Delta effects. **Earthquake Spectra**, v. 3, n. 2, p. 289-298, 1987. DOI: <https://doi.org/10.1193/1.1585429>.

YANIK, A.; ULUS, Y. Soil-structure interaction consideration for base isolated structures under earthquake excitation. **Buildings**, v. 13, n. 4, 915, 2023. DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings13040915>.

ZHANG, J. Y.; AOKI, T. Damage detection of multi-story shear buildings due to earthquakes by model updating method. **Structural Control and Health Monitoring**, v. 24, n. 4, 2017. DOI: <https://doi.org/10.1002/stc.1895>.

ZHANG, R.; SUN, Z.; QU, C. P-Delta effects on nonlinear dynamic response of steel moment-resisting frame structures subjected to near-fault pulse-like ground motions. **Structures**, v. 41, p. 1122-1140, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2022.05.042>.

ZUO, Z.; HE, Y.; LI, S. Rational use of idealized shear-building models to approximate actual buildings. **Buildings**, v. 12, n. 3, 273, 2022. DOI: <https://doi.org/10.3390/buildings12030273>.