

## ANÁLISE DE CONVECÇÃO TRANSIENTE INTERNA: Solução Via Transformadas Integral e de Laplace e Computação Simbólica

Jacques Cesar dos Santos

Jean Pierre Veronese

Universidade Federal da Paraíba

E-mail: jacquescesarsantos@ig.com.br

E-mail: jpveronese@ig.com.br

### Resumo

*No presente trabalho um estudo teórico da convecção forçada transiente interna em um canal de placas planas paralelas é apresentado. É feita uma formulação geral da convecção forçada transiente para um escoamento hidrodinamicamente desenvolvido, com uma condição de entrada em degrau e uma condição de contorno do 1º tipo na parede. A Técnica da Transformada Integral é usada aliada a Transformada Clássica de Laplace para encontrar uma solução analítica aproximada do problema. O código computacional desenvolvido em computação simbólica permite uma análise apurada da solução.*

Palavras-chave: Transformada Integral. Convecção. Computação Simbólica.

### 1. Introdução

O estudo dos fenômenos relativos à transferência de calor na convecção forçada interna tem sido realizado, essencialmente, para atender a uma necessidade prática, uma vez que a maioria das soluções encontradas para este tipo de fenômeno, notadamente, na região de entrada térmica e desenvolvimento simultâneo do fluido podem ser úteis no projeto de dispositivos térmicos de melhor desempenho.

Portanto, componentes eletrônicos, condensadores, evaporadores, trocadores de calor, entre outros são exemplos da possível utilização. Mais, ainda, com a crescente miniaturização e a necessidade de otimização destes equipamentos, tem se tornado uma necessidade mundial. Um outro fator importante neste estudo é a crescente busca de soluções exatas e de referência para problemas de engenharia, cada vez mais, complexos. Por esta razão, a abordagem teórica vem ganhando espaço sobre a experimentação. Isto ocorre, primeiro porque a experimentação é geralmente demorada, além do fato de ser muito dispendiosa, pois para cada experiência têm-se novos gastos, tais como a utilização e aferição de novos equipamentos, para adaptação da nova situação no problema em análise.

Com o desenvolvimento dos computadores digitais com velocidades de processamento, cada vez maiores, têm-se avançado bastante na simulação de problemas em mecânica dos fluidos e transferência de calor, minimizando o tempo de trabalho e reduzindo, assim, o custo.

Utilizou-se a Transformada Integral, que é um método de manuseio analítico, que pode apresentar soluções completamente analíticas, ou para casos de maior complexidade, apresenta soluções híbridas, analítico-numéricas, onde se tem um controle preestabelecido sobre o erro, aliada a Transformada clássica de Laplace e a Computação Simbólica, que possibilita a manipulação analítica, o que permite soluções exatas e, ainda mais, pode combinar-se com o cálculo numérico, e aliada à saída gráfica permite uma melhor visualização dos resultados.

## 2. Formulação do Problema

O problema físico considerado consiste de um escoamento laminar hidrodinamicamente desenvolvido no interior de um duto de placas planas paralelas, submetido à convecção forçada, com temperatura de entrada em degrau. O sistema em estudo é constituído por um canal de placas paralelas infinitas na largura, de comprimento  $L$ , no interior do qual escoar um fluido newtoniano. O sistema assim definido está, inicialmente, em equilíbrio térmico a uma temperatura  $T_0$ . É então provocada uma perturbação em degrau na temperatura de entrada do fluido  $T_0 + \Delta T(y)$ . O sistema possui uma condição de contorno com temperatura prescrita na parede do canal. As paredes são sólidas e impermeáveis. O escoamento ocorre na direção  $x$ , sendo simétrico em relação a  $y$ , conforme está representada na Fig. 1. O fluido em estudo é considerado incompressível, com propriedades constantes, desprezam-se os efeitos da dissipação viscosa.

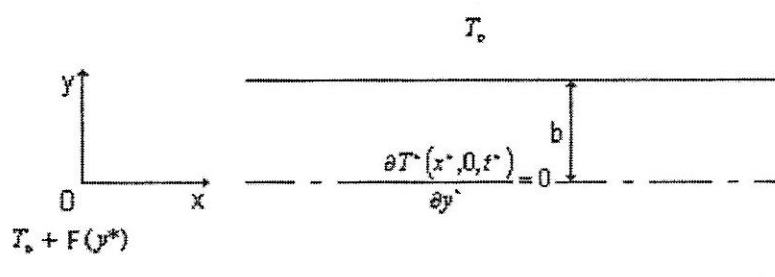


FIGURA 1: Representação esquemática do problema.

Para o problema proposto são considerados os seguintes grupos adimensionais:

$$x = \frac{\alpha x^*}{\bar{u} b^2}; \quad y = \frac{y^*}{b}; \quad u = \frac{u^*}{\bar{u}}; \quad \theta = T^* - T_0; \quad t = \frac{\alpha t^*}{b^2}; \quad (1.1)$$

Com a utilização dos grupos adimensionais, o problema pode ser representado pela equação da energia, e suas condições de contorno e de entrada como:

$$\frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial t} + u(y) \frac{\partial \theta(x, y, t)}{\partial x} = \frac{\partial^2 \theta(x, y, t)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \quad (1.2.a)$$

$$\theta(x, y, 0) = 0 \quad ; \quad \theta(0, y, t) = \Delta T(y) \quad , \quad x \geq 0 \quad , \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (1.2.b,c)$$

$$\frac{\partial \theta(x, 0, t)}{\partial y} = 0 \quad ; \quad \theta(x, 1, t) = 0 \quad , \quad t > 0 \quad x \geq 0 \quad (1.2.d,e)$$

Segundo Mikhailov e Özisik (1984), o perfil de velocidade adimensional completamente desenvolvido é dado por:

$$u(y) = \frac{3}{2}(1 - y^2); \quad \text{para o escoamento completamente desenvolvido.} \quad (1.2.d)$$



### 3. Metodologia de Solução

Séguindo os passos apresentados por Gondim(1997), aplica-se a Transformada Clássica de Laplace sobre a variável tempo no sistema de Eqs. 1.2.a-e, obtendo-se :

$$s\tilde{\theta}(x,y)+u(y)\frac{\partial\tilde{\theta}(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial^2\tilde{\theta}(x,y)}{\partial y^2}, \quad 0 < y < 1, x > 0, t > 0 \quad (1.3.a)$$

$$\tilde{\theta}(0,y)=\frac{\Delta T(y)}{s} \quad t > 0, 0 \leq y \leq 1 \quad (1.3.b)$$

$$\frac{\partial\tilde{\theta}(x,0)}{\partial y}=0; \quad \tilde{\theta}(x,1)=0, \quad t > 0 \quad x \geq 0 \quad (1.3.c,d)$$

Onde  $\tilde{\theta}(x,y)$  é a transformada de Laplace do potencial  $\theta(x,y,t)$ .

#### 3.1 Problema de Autovalor na Direção y

Como primeiro passo para resolver o problema, Eqs. 1.3.a-e, usando a Transformada Integral, define-se um problema de autovalor, na direção y:

$$\frac{d^2 Y_n(y)}{dy^2} + \beta_n^2 Y_n(y) = 0 \quad ; \quad \frac{dY_n(0)}{dy} = 0 \quad ; \quad Y_n(1) = 0 \quad (2.1.a,b,c)$$

Onde as autofunções, a norma, e os autovalores são dados respectivamente por:

$$Y_n(y) = \cos(\beta_n y) \quad ; \quad NY_n = \int_0^1 \tilde{Y}_n^2(y) dy = \frac{1}{2} \quad ; \quad \beta_n = (n - \frac{1}{2})\pi \quad (2.1.d,e,f)$$

Logo a Autofunção Normalizada torna-se:

$$\tilde{Y}_n(y) = Y_n(y) / NY_n^{1/2} \quad (2.1.g)$$

Obedecendo a propriedade de ortogonalidade:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \tilde{Y}_m(y) dy = \delta_{nm}, \quad \text{onde} \quad \begin{cases} \delta_{nm} = 1 & , \quad n = m \\ \delta_{nm} = 0 & , \quad n \neq m \end{cases} \quad (2.1.h)$$

#### 3.2 Par Transformada-Inversa

Escrevendo a função  $\theta(x,y)$  como uma expansão que tem como base as autofunções oriundas do problema de autovalor, Eqs. 2.1a-c, e observando a propriedade de ortogonalidade, Eq. 2.1.h, temos:

$$\bar{\theta}_n(x) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \theta(x,y) dy \quad \text{TRANSFORMADA} \quad (3.1.a)$$

$$\theta(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{Y}_n(y) \bar{\theta}_n(x) \quad \text{INVERSA} \quad (3.1.b)$$

### 3.3 Transformação do Problema na Direção y

Operando a Eq. 2.1a com o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$ , tem-se:

$$\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) s \bar{\theta}(x, y) dy + \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \frac{\partial \bar{\theta}(x, y)}{\partial x} dy = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \frac{\partial^2 \bar{\theta}(x, y)}{\partial y^2} dy \quad (4)$$

Aplicando-se a equação da Inversa 3.1.b em cada termo, e utilizando a propriedade de ortogonalidade, Eq. 2.1.h, o problema fica transformado no sistema diferencial ordinário:

$$s \bar{\theta}_n(x) + \sum_{m=1}^{\infty} A_{nm} \frac{\partial \bar{\theta}_m(x)}{\partial x} = -\beta_n^2 \bar{\theta}_n(x) \quad (5.1.a)$$

Aplicando o operador  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) dy$  na condição inicial, tem-se:

$$\bar{\theta}_n(0) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \frac{\Delta T(y)}{s} dy = \frac{1}{s} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \Delta T(y) dy \quad (5.1.b)$$

Onde o termo  $A_{nm}$  é dado por:  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \tilde{Y}_m(y) dy$

## 4. Solução do Sistema de Equações Diferenciais Ordinário

Desprezando-se os termos não diagonais na Eq. 5.1.a, o sistema de equações é aproximado por:

$$s \bar{\theta}_{An}(x) + A_{nn} \frac{\partial \bar{\theta}_{An}(x)}{\partial x} = -\beta_n^2 \bar{\theta}_{An}(x) \quad ; \quad \bar{\theta}_{An}(0) = \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \Delta T(y) dy \quad (6.1.a,b)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias, desacoplado, Eqs. 6.1a-b, tem como solução:

$$\bar{\theta}_{An}(x) = \frac{1}{s} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \Delta T(y) dy \text{Exp}\left(\frac{-(\beta_n^2 + s)x}{A_{nn}}\right) \quad (7)$$

### 4.1 Recuperação do Potencial Original

Para a recuperação do potencial original, inicialmente substitui-se a Eq. 7 na Eq. 3.1.b, equação da Inversa, obtendo-se:

$$\bar{\theta}_A(x, y) = \sum_{n=1}^m \tilde{Y}_n(y) \frac{1}{s} \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \Delta T(y) dy \text{Exp}\left(\frac{-(\beta_n^2 + s)x}{A_{nn}}\right) \quad (8)$$

Observando-se que o potencial original é dado pela inversão da Transformada Clássica de Laplace da Eq. 8, aplica-se este procedimento matemático, o que pode ser efetivamente simplificado pelo emprego de um programa de computador que execute a manipulação simbólica, obtendo-se:

$$\theta_A(x, y, t) = \sum_{n=1}^{nt} \tilde{Y}_n(y) \int_0^1 \tilde{Y}_n(y) \Delta T(y) dy \text{Exp}\left(-\frac{\beta_n^2 x}{A_{nn}}\right) U\left(t - \frac{x}{A_{nn}}\right) \quad (9)$$

Esta equação é a solução analítica aproximada do sistema de equações diferenciais do problema, Eqs. 1.2.a-e, onde o termo  $A_{nn}$  é dado por:  $\int_0^1 \tilde{Y}_n(y) u(y) \tilde{Y}_n(y) dy$ , e  $nt$  é o numero de termos no somatório. Segundo Cotta (1993), a temperatura média e o Numero de Nusselt local são dados respectivamente por:

$$\theta_m(x, t) = \frac{\int_0^1 u(y) \theta(x, y, t) dy}{\int_0^1 u(y) dy} ; \quad Nu(x, t) = \frac{-4 \frac{\partial \theta(x, 1, t)}{\partial y}}{\theta(x, 1, t) - \theta_m(x, t)} \quad (10.a,b)$$

### 5. Resultados e discussão

Com o intuito de avaliar, a presente solução é testada através da convergência. Os resultados são mostrados na Tab. 1, que apresenta a convergência da solução analítica aproximada, para uma faixa de valores ao longo da linha central do duto, onde se observa uma rápida convergência.

TABELA 1: Convergência da temperatura ao longo da linha central, para:  $t=3, F(y)=1-y^2, y=0$

nt/x	0.2	0.4	0.6	0.8	1
1 termo	0.7068	0.4841	0.3316	0.2271	0.1555
2 termos	0.7063	0.4841	0.3316	0.2271	0.1555
3 termos	0.7063	0.4841	0.3316	0.2271	0.1555

A Fig. 2.a apresenta a temperatura média ao longo do duto. A Fig. 2.b apresenta a amplitude da temperatura para uma região do domínio. Para ambas utilizou-se  $nt=3, t=0.5, F(y)=1-y^2$ .

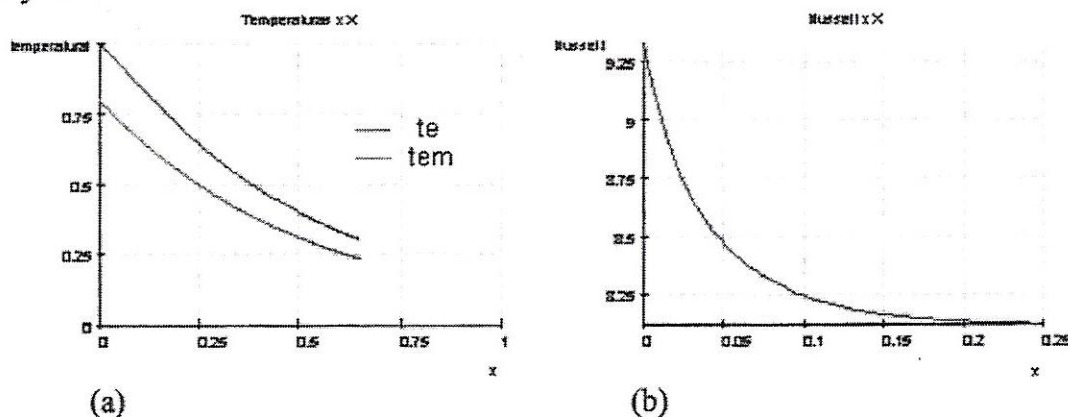


FIGURA 2: (a) Temperatura média e temperatura na linha central (b) Numero de Nusselt local



A Fig. 3.a apresenta o transiente da temperatura em uma seção do duto utilizou-se  $nt=3$ ,  $t=0.5$ ,  $F(y)=1-y^2$ , pode-se observar a frente térmica se propagando ao longo do duto. A Fig. 3.b apresenta a amplitude da temperatura para uma região do domínio utilizou-se  $nt=3$ ,  $t=3$ ,  $F(y)=1-y^2$ .

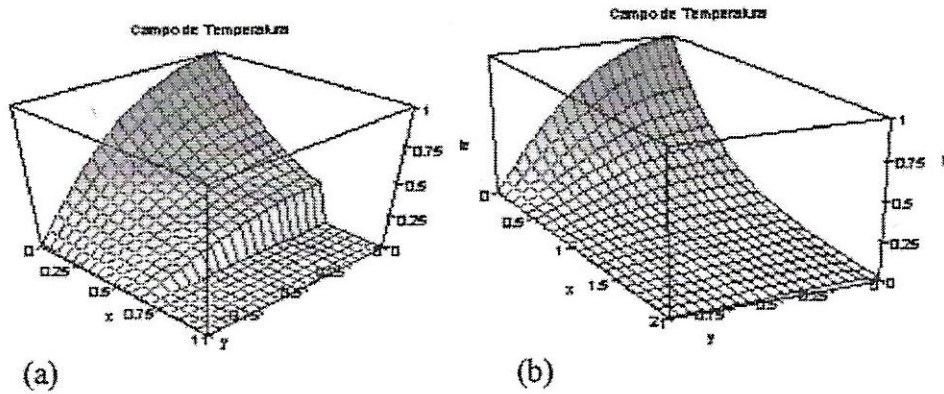


FIGURA 3: (a) Campo de Temperatura  $t=0.5$  (b) Campo de Temperatura  $t=3$

## 6. Conclusão

Um estudo teórico da convecção forçada interna em um canal de placas planas paralelas foi apresentado. A análise foi realizada através da Transformada Integral aliada a Transformada Clássica de Laplace e à Computação Simbólica. O procedimento desenvolvido neste trabalho mostrou ser útil no estudo deste problema térmico. A proposta da utilização da Computação Simbólica é uma nova tendência, oferece uma programação simples e poderosa. Aplicada no tratamento deste problema, permitiu a manipulação analítica, e simplificou o desenvolvimento do código computacional. A saída gráfica integrada é de fácil utilização e simplifica a tarefa da interpretação física da solução encontrada.

## 7. Referências Bibliográficas

- BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valor de contorno**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara, 1988.
- COTTA, R. M. **Integral transforms in computational heat and fluid flow**. Boca Raton, USA: CRC Press, 1993.
- GONDIM, R.R. **Convecção forçada transiente interna com difusão axial solução via transformação integral**. Rio de Janeiro: UFRJ/COPPE, 1997. Tese.
- MIKHAILOV, M. D.; ÖZISIK, M. N. **Unified analysis and solutions of heat and mass diffusion**. New York, USA: John Wiley, 1984.
- SANTOS, J.C. **Análise teórica de convecção forçada laminar transiente com entrada térmica periódica**. João Pessoa: UFPB, 2002. Dissertação de Mestrado.
- The MuPad Tutorial . [www.mupad.com](http://www.mupad.com).