

SUBMETIDO 01/04/2022
APROVADO 14/07/2022
PUBLICADO ON-LINE 29/07/2022
PUBLICADO 10/01/2024
EDITOR ASSOCIADO
José Carlos Lima Júnior

DOI: <http://dx.doi.org/10.18265/1517-0306a2022id6776>

ARTIGO ORIGINAL

Soluções híbridas na determinação da espessura da camada limite hidrodinâmica e térmica de maneira acoplada

 Marinaldo José de Medeiros ^{[1]*}
 Jesus Marinaldo de Medeiros ^[2]
 Carlos Antonio Cabral dos Santos ^[3]

[1] marinaldo.medeiros@ifpb.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB),
Campus Itabaiana, Brasil

[2] jesus.medeiros@ifpb.edu.br
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB),
Campus João Pessoa, Brasil

[3] carloscabralsantos@yahoo.com.br
Universidade Federal da Paraíba (UFPB), Brasil

RESUMO: Neste artigo é resolvido um problema conjugado condução-convecção externa, no escoamento laminar incompressível de um fluido newtoniano sobre uma placa plana, em regime permanente, com objetivo de mostrar o perfil de velocidade, temperatura e as camadas limites hidrodinâmica e térmica. As equações de momento e energia são transformadas usando mudança de variável para determinar as espessuras das camadas limites. Para resolver o problema acoplado foi necessário utilizar, no campo hidrodinâmico, a solução analítica exata da espessura da camada limite hidrodinâmica, enquanto no campo térmico foi utilizada a relação entre o número de Prandtl e a espessura da camada limite hidrodinâmica. As equações diferenciais parciais da quantidade de movimento e da energia são transformadas em equações diferenciais ordinárias através da técnica da transformada integral generalizada, que apresenta uma solução híbrida analítico-numérica, tornando possível determinar a espessura da camada limite hidrodinâmica sem utilizar o método de similaridade (solução de Blasius), o que mostra um tratamento inédito na resolução deste problema. A evolução da posição da camada limite hidrodinâmica foi calculada e comparada com soluções aproximadas, obtendo-se excelentes resultados. No campo térmico, variando os parâmetros adimensionais Prandtl e Reynolds, observou-se um comportamento inversamente proporcional à espessura da camada limite, conforme previsto na literatura.

Palavras-chave: espessura de camada limite; problema conjugado condução-convecção; transformada integral generalizada.

Hybrid solutions for determining hydrodynamic and thermal boundary layer thickness in a coupled manner

ABSTRACT: In this paper, a conjugate external conduction-convection problem is solved, in the incompressible laminar flow of a Newtonian fluid over a flat plate, in steady state, to show the temperature and velocity profiles, and the

*Autor para correspondência.

hydrodynamic and thermal boundary layers. The momentum and energy equations are transformed using change of variable to determine the thicknesses of the boundary layers. To solve the coupled problem, it was necessary to use, in the hydrodynamic field, the exact analytical solution of the hydrodynamic boundary layer thickness, while in the thermal field, the relationship between the Prandtl number and the hydrodynamic boundary layer thickness was used. The partial differential equations of the amount of movement and energy are transformed into ordinary differential equations through the generalized integral transform technique, which presents a hybrid analytical-numerical solution, making it possible to determine the thickness of the hydrodynamic boundary layer without using the similarity method (Blasius solution), which shows an unprecedented approach in solving this problem. The evolution of the hydrodynamic boundary layer position was calculated and compared with approximate solutions, obtaining excellent results. In the thermal field, varying the dimensionless parameters Prandtl and Reynolds, a behavior inversely proportional to the thickness of the boundary layer was observed, as predicted in the literature.

Keywords: *boundary layer thickness; conjugate conduction-convection problem; generalized integral transform.*

1 Introdução

A teoria da camada limite é uma das ideias mais importantes da mecânica dos fluidos, desenvolvida por Prandtl em 1904, que leva em consideração os efeitos viscosos para o entendimento do estudo em transferências de calor e massa por convecção. Usando algumas considerações teóricas e vários experimentos simples, Prandtl mostrou que o escoamento ao redor de um corpo pode ser dividido em duas regiões: uma camada fina ao redor do corpo, chamada de camada limite, em que as forças viscosas são importantes, e uma região externa ao corpo em que as forças viscosas podem ser desprezadas (Freire, 2012).

Prandtl utilizou as equações de camada limite para descrever perfeitamente os efeitos viscosos, sem a necessidade de resolver as equações de Navier-Stokes. Essas equações simplificadas tornaram-se a base para o desenvolvimento da mecânica dos fluidos teórica moderna, juntamente com a teoria do aerofólio e a ciência da dinâmica dos gases (Freire, 2012).

Uma das aplicações mais simples e convencionais da teoria da camada limite é em um escoamento sobre uma placa plana de comprimento infinito.

Blasius solucionou as equações da camada limite através da mudança de variável via função corrente, formada ao longo de uma placa plana, transformando a equação diferencial parcial em uma equação diferencial ordinária não linear, ou seja, uma solução de similaridade chamada de equação de Blasius.

Com a evolução dos computadores de última geração e o aumento da capacidade de processadores disponíveis no mercado, aumentou o número de soluções para equações que antes eram consideradas impossíveis de resolver devido à necessidade de memória suficiente para rodar os programas. Com isso, vários pesquisadores têm buscado novas soluções para o problema de Blasius usando algoritmos ou resolvendo o problema por meio de séries, a fim de encontrar uma solução que melhor represente o modelo matemático e o fenômeno físico.

Naveira *et al.* (2007) estudaram o problema conjugado condução-convecção externa transiente aplicando um fluxo de calor na parede através da técnica da transformada integral generalizada por meio do método de linhas. No campo hidrodinâmico, utilizaram a solução de Blasius (método de similaridade), já no campo térmico, aplicaram um filtro que utiliza a espessura da camada limite térmica e obtiveram soluções transientes para a temperatura da parede compatíveis com resultados obtidos pela solução exata de Blasius.

Adebisi (2015) fez um estudo do escoamento da camada limite sobre uma placa plana usando um método semianalítico de decomposição chamado de *Modified Adomian Decomposition Method* (MADM), e o comparou com o método numérico de diferenças finitas denominado de *Runge-Kutta Shooting Method* (R-KSM), obtendo resultados convergentes com a solução de Blasius.

Parveen (2016) encontrou uma solução numérica para a equação de Blasius usando os métodos de Runge-Kutta e de disparo (*shooting*) através do software Matlab, obtendo resultados em boa concordância com a solução exata.

Bognar (2017) resolveu numericamente o problema de Blasius usando o método da similaridade para a determinação dos perfis de velocidade e temperatura na camada limite próxima a uma superfície móvel horizontal aquecida por baixo. Os resultados mostraram que o aumento no número de Prandtl leva a uma diminuição na temperatura da parede e na temperatura na espessura da camada limite térmica, e o aumento do parâmetro de empuxo leva a um aumento da velocidade na camada limite de momento e a uma ligeira diminuição na temperatura da parede e na temperatura na camada limite térmica.

Seyyedi *et al.* (2019) estudaram as equações de camada limite em uma placa plana no intuito de obter uma solução mais precisa para determinação da espessura da camada limite e do número de Nusselt, encontrando um novo perfil de velocidade com polinômio de ordem m . Calculando com m igual a 2,5243, chegaram a uma nova relação para as espessuras das camadas limites hidrodinâmica e térmica, obtendo resultados próximos às soluções de Blasius.

Oliveira e Almeida (2019) mostraram que a equação de Blasius e o sistema de Ostrach podem ser resolvidos em termos do problema de valor inicial (PVI) e fazendo uso da técnica de otimização, pelo método *Initial Value Problem Approximation by Sequential Parameter Optimization* (IVASO), com boa concordância com resultados da literatura.

Fazio (2019) definiu um método de transformação não iterativo para o problema de Blasius, com resultados numéricos obtidos em boa concordância com os disponíveis na literatura.

Jaguaribe (2020) apresenta duas inconsistências na solução de Blasius em uma placa plana: i) matemática: a equação diferencial ordinária de terceira ordem é resolvida com quatro condições de contorno; ii) física: os perfis de velocidade resultantes não atendem às definições da camada limite como definida por Prandtl. Baseado nisso, o autor resolveu o problema proposto usando a expansão da função z através da série de MacLaurin. A solução convergiu utilizando 461 termos via software Matlab, encontrando $x = 58,8154$ e obtendo o parâmetro de similaridade $\eta_\infty = 4,67551$.

Fazio (2021) aprimorou um método de transformação não iterativo que permitiu resolver numericamente o problema de Blasius. Os resultados numéricos obtidos foram melhorados tanto por um refinamento de malha quanto usando a técnica de extrapolação de Richardson.

Asaithambi (2021) fez uma revisão sobre a resolução do problema de valor de contorno de terceira ordem não linear numa cunha infinita cujo ângulo de vértice é $\beta \pi$, denominado de equação de Falkner-Skan, usando tratamentos analíticos, semianalíticos e numéricos (chute, diferenças finitas, de colocação e outros métodos híbridos). Vale

salientar que adotar $\beta = 0$ implica dizer que não existe cunha, logo o problema tratado corresponde ao problema de Blasius.

Monteiro (2021) estudou a equação de Blasius por meio de soluções numéricas usando a função corrente, pelo Método de Otimização de Parâmetros junto ao Cálculo Fracionário, para obter, numericamente, resultados mais refinados dos perfis de velocidade e temperatura.

Medeiros e Santos (2021) realizaram uma análise teórica do comportamento hidrodinâmico e térmico da espessura da camada limite num problema conjugado condução-convecção externa, num escoamento laminar de um fluido newtoniano numa placa plana, em regime permanente, através da aplicação da técnica da transformada integral generalizada, encontrando resultados convergentes com a solução exata de Blasius.

Fareo (2022) resolveu o problema de Blasius e uma variante do modelo de Falkner-Skan através do método de transformação iterativo, transformando um problema de valor de contorno em um problema de valor inicial.

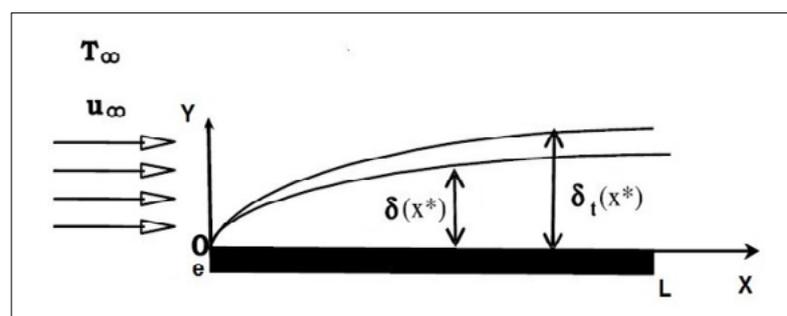
O objetivo principal deste artigo é analisar o fenômeno de transferência de calor no problema conjugado condução-convecção externa e determinar as espessuras das camadas limites hidrodinâmica e térmica e os perfis de velocidade e temperatura através da aplicação da técnica *Generalized Integral Transform Technique* (GITT), possibilitando o uso de técnicas para aceleração da convergência do problema proposto, que apresenta condições de contorno não lineares, garantindo a precisão dos resultados e diminuindo o custo computacional.

No restante do artigo, na seção 2, apresenta-se a modelagem matemática do problema com as equações governantes e suas condições de contorno. Na seção 3, encontra-se a descrição da metodologia utilizada, que transforma o sistema de equações diferenciais parciais em ordinárias. Em seguida é resolvido o sistema de equações pela subrotina NDSolve do software Mathematica. Na seção 4, são apresentados os resultados numéricos obtidos e comparados com dados da literatura. Por fim, as conclusões e possíveis direções para pesquisas futuras são discutidas na seção 5.

2 Modelagem matemática

O problema considerado envolve escoamento laminar incompressível de um fluido newtoniano sobre uma placa plana, com escoamento em regime permanente. O fluido escoava com uma velocidade de fluxo livre u_∞ que chega à borda frontal da placa na temperatura T_∞ , conforme mostrado na Figura 1. A parede é considerada participante do problema de transferência de calor, com espessura “ e ”, comprimento “ L ” e propriedades termofísicas relacionadas. As equações das camadas limites são consideradas válidas para o problema de fluxo e transferência de calor dentro do fluido, e o problema conjugado condução-convecção externa descrito em Naveira (2006) é escrito como:

Figura 1 ►
Descrição do problema físico e sistema de coordenadas.
Fonte: Medeiros e Santos (2021)



Continuidade:

$$\frac{\partial u(x^*, y^*)}{\partial x^*} + \frac{\partial v(x^*, y^*)}{\partial y^*} = 0 \quad (1)$$

Quantidade de Movimento na direção x:

$$u \frac{\partial u}{\partial x^*} + v \frac{\partial u}{\partial y^*} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx^*} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^{*2}} \quad (2)$$

Quantidade de Movimento na direção y:

$$-\frac{dP}{dy^*} = 0 ; 0 < y^* < \delta^*(x) \quad (3)$$

Energia:

$$u \frac{\partial T(x^*, y^*)}{\partial x^*} + v \frac{\partial T(x^*, y^*)}{\partial y^*} = \alpha \frac{\partial^2 T(x^*, y^*)}{\partial y^{*2}} \quad (4)$$

Com as condições iniciais:

$$u(0, y^*) = U_\infty ; v(0, y^*) = 0 \quad (5a-b)$$

$$T(0, y^*) = T_\infty \quad (5c)$$

E condições de contorno:

$$u(x^*, 0) = 0 ; v(x^*, 0) = 0 \quad (6a-b)$$

$$\left. \frac{\partial T(x^*, y^*)}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} = -\delta_t^*(x^*) \quad (6c)$$

$$u(x^*, \delta^*(x^*)) = U_\infty ; T(x^*, \delta^*(x^*)) = T_\infty ; v(x^*, \delta^*(x^*)) = 0 \quad (7a-c)$$

O problema hidrodinâmico e conjugado condução-convecção também pode ser reescrito após a introdução das seguintes variáveis adimensionais:

$$U = \frac{u}{U_\infty} ; V = \frac{v}{U_\infty} ; x = \frac{x^*}{L} \quad (8a-c)$$

$$y = \frac{y^*}{L} ; \delta = \frac{\delta^*}{L} ; \delta_t = \frac{\delta_t^*}{L} \quad (8d-f)$$

$$p^* = \frac{p}{L U_\infty^2} ; Re = \frac{U_\infty L}{\nu} \quad (8g-h)$$

$$Pe = \frac{U_\infty L}{\alpha} ; \theta = \frac{(T - T_\infty) K}{q_{ref} L} \quad (8i-j)$$

Introduzindo uma transformação de regularização de domínio para o domínio espacial, escrita como:

$$\chi = x ; \eta = \frac{y}{\delta(\chi)} \quad (9a-b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \chi} - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (9c)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (9d)$$

Então, a forma adimensional para a equação da quantidade de movimento e energia após a transformação de regularização de domínio para o domínio espacial é escrita como:

Continuidade:

$$\frac{\partial U}{\partial \chi} - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{\partial V}{\partial \eta} = 0 \quad (10)$$

Quantidade de Movimento na direção x:

$$U \frac{\partial U}{\partial \chi} - \frac{U}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{V}{\delta(\chi)} \frac{\partial U}{\partial \eta} = - \frac{dp^*}{d\chi} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\delta(\chi)^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \quad (11)$$

Quantidade de Movimento na direção y:

$$- \frac{dp^*}{d\eta} = 0 ; 0 < \eta < 1 \quad (12)$$

Energia:

$$U \left(\frac{\partial \theta}{\partial \chi} - \frac{\eta}{\delta_t(\chi)} \frac{d\delta_t(\chi)}{d\chi} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \right) + \frac{V}{\delta_t(\chi)} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} = \frac{1}{Pe} \frac{1}{\delta_t(\chi)^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} \quad (13)$$

Com as condições iniciais:

$$U(0, \eta) = 1 \quad ; \quad V(0, \eta) = 0 \quad (14a-b)$$

$$\theta(0, \eta) = 0 \quad (14c)$$

E condições de contorno:

$$U(\chi, 0) = 0 \quad ; \quad V(\chi, 0) = 0 \quad (15a-b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(\chi, \eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = -\delta_t(\chi) \quad (15c)$$

$$U(\chi, 1) = 1 \quad ; \quad V(\chi, 1) = 0 \quad (16a-b)$$

$$\theta(\chi, 1) = 0 \quad (16c)$$

3 Método de solução

A técnica da transformada integral generalizada (GITT) é uma metodologia híbrida analítico-numérica que consiste basicamente em atuar analiticamente até onde é possível e, em seguida, resolver numericamente o problema proposto, oferecendo um controle na precisão e permitindo uma performance computacional eficiente para uma grande variedade de problemas não transformáveis, incluindo as formulações não lineares mais usuais nas aplicações em transferência de calor e mecânica dos fluidos. Essa técnica tem sido utilizada com sucesso na solução de problemas convectivo-difusivos (Cotta; Knupp; Quaresma, 2018; Santos; Silva, 2005; Veloso; Cabral; Lima, 2020).

Para a solução do problema hidrodinâmico e térmico, uma vez que há direção convectiva preferencial alinhada com o fluxo, optou-se pela transformação integral para ser operada apenas na direção transversal, ao longo da qual predomina a difusão. Como o sistema de equações proposto possui condições de contorno não homogêneas, para melhorar o desempenho da GITT é necessário homogeneizá-las. Os filtros e suas soluções que foram utilizados por Naveira (2006) são escritos como:

$$U(\chi, \eta) = U^*(\chi, \eta) + U_F(\eta) \quad (17)$$

$$UF(\eta) = \eta \quad (18)$$

$$\theta(\chi, \eta_t) = \theta^*(\chi, \eta_t) + TF(\chi, \eta_t) \quad (19)$$

$$TF(\chi, \eta_t) = \frac{\delta_t(\chi)}{2} (1 - \eta_t)^2 \quad (20)$$

Aplicando as soluções de filtragem propostas, as equações de continuidade, quantidade de movimento e energia são dadas por:

$$\frac{\partial U^*}{\partial \chi} = \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \left(\frac{\partial U^*}{\partial \eta} + 1 \right) - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{\partial V}{\partial \eta} \quad (21)$$

$$(U^* + \eta) \left(\frac{\partial U^*}{\partial \chi} - \frac{1}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \eta \left(\frac{\partial U^*}{\partial \eta} + 1 \right) \right) + \frac{v}{\delta(\chi)} \left(\frac{\partial U^*}{\partial \eta} + 1 \right) = -\frac{dp^*}{d\chi} + \frac{1}{Re} \frac{1}{\delta(\chi)^2} \frac{\partial^2 U^*}{\partial \eta^2} \quad (22)$$

$$(U^* + \eta) \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \chi} - \frac{\partial TF}{\partial \chi} \right) + \frac{V}{\delta_t(\chi)} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} - \frac{\partial TF}{\partial \eta} \right) + (U^* + \eta) \left(-\frac{\eta}{\delta_t(\chi)} \frac{d\delta_t(\chi)}{d\chi} \left(\frac{\partial \theta^*}{\partial \eta} - \frac{\partial TF}{\partial \eta} \right) \right) = \frac{1}{Pe} \frac{1}{\delta_t(\chi)^2} \left(\frac{\partial^2 \theta^*}{\partial \eta^2} - \frac{\partial^2 TF}{\partial \eta^2} \right) \quad (23)$$

Seguindo os passos básicos da GITT (Cotta, 1993), os problemas auxiliares apropriados para o processo de transformada integral são dados a seguir:

Campo hidrodinâmico:

$$\frac{d^2 \psi_i(\eta)}{d\eta^2} + \mu_i^2 \psi_i(\eta) = 0 ; \psi_i(0) = 0 ; \psi_i(1) = 0 \quad (24)$$

Os quais são prontamente resolvidos pelas autofunções, autofunções normalizadas, autovalores e normas, respectivamente, como:

$$\psi_i(\eta) = \text{Sin}[\mu_i \eta]; \widetilde{\psi}_i(\eta) = \frac{\psi_i(\eta)}{\sqrt{N_i}}; \mu_i = i\pi; N_i = \int_0^1 \psi_i(\eta) \psi_j(\eta) d\eta = \frac{1}{2}; i = 1, 2, 3 \dots \quad (25)$$

Campo térmico:

$$\frac{d^2 \phi_i(\eta_t)}{d\eta_t^2} + \Omega_i^2 \phi_i(\eta_t) = 0 ; \frac{d\phi_i(0)}{d\eta_t} = 0 ; \phi_i(1) = 0 \quad (26)$$

Os quais são prontamente resolvidos pelas autofunções, autofunções normalizadas, autovalores e normas, respectivamente, como:

$$\phi_i(\eta_t) = \text{Cos}[\Omega_i \eta_t] ; \tilde{\phi}_i(\eta_t) = \frac{\phi_i(\eta_t)}{\sqrt{M_i}} ; \Omega_i = \frac{(2i-1)}{2} \pi ; M_i = \int_0^1 \phi_i(\eta_t) \phi_j(\eta_t) d\eta_t \quad (27)$$

Os problemas auxiliares de autovalores das Equações 24 e 26 permitem a definição dos seguintes pares de transformação inversa:

$$\overline{U}_j^*(\chi) = \int_0^1 \tilde{\psi}_j(\eta) U^*(\chi, \eta) d\eta \quad (28)$$

$$U^*(\chi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\psi}_j(\eta) \overline{U}_j^*(\chi) \quad (29)$$

$$\overline{\theta}_j^*(\chi) = \int_0^1 \tilde{\phi}_j(\eta_t) \theta^*(\chi, \eta_t) d\eta_t \quad (30)$$

$$\theta^*(\chi, \eta) = \sum_{j=1}^{\infty} \tilde{\phi}_j(\eta_t) \overline{\theta}_j^*(\chi) \quad (31)$$

Aplicando os operadores sobre as Equações 22 e 23, seguidos pela fórmula inversa, tem-se como resultado:

Equação da quantidade de movimento:

$$\begin{aligned} & \delta(\chi)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} AV_{ijk} \overline{U}_j^*(\chi) \right) \frac{d\overline{U}_k^*(\chi)}{d\chi} + \delta(\chi)^2 \sum_{k=1}^{\infty} BV_{ik} \frac{d\overline{U}_k^*(\chi)}{d\chi} - \delta(\chi) \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} FV_i \\ & - \delta(\chi) \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} CV_{ijk} \overline{U}_j^*(\chi) + EV_{ik} \right) \overline{U}_k^*(\chi) + \frac{\mu_i^2}{RE} \overline{U}_i^*(\chi) \\ & = - \delta(\chi)^2 \frac{dp(\chi)}{d\chi} FF_i \end{aligned} \quad (32)$$

com os coeficientes escritos nas Equações 33-41:

$$AV_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \tilde{\psi}_j(\eta) \tilde{\psi}_k(\eta) d\eta + \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) H_k(\eta) \frac{d\tilde{\psi}_j(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (33)$$

$$BV_{ij} = \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) \eta \tilde{\psi}_j(\eta) d\eta + \int_0^1 \tilde{\psi}_i(\eta) H_j(\eta) d\eta \quad (34)$$

$$CV_{ijk} = \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) \eta \widetilde{\psi}_j(\eta) \frac{d\widetilde{\psi}_k(\eta)}{d\eta} d\eta + \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) F_j(\eta) \frac{d\widetilde{\psi}_j(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (35)$$

$$DV_{ik} = \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) \eta^2 \frac{d\widetilde{\psi}_k(\eta)}{d\eta} d\eta + \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) \eta \widetilde{\psi}_k(\eta) d\eta \quad (36)$$

$$EV_{ik} = \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) G(\eta) \frac{d\widetilde{\psi}_k(\eta)}{d\eta} d\eta + \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) H_k(\eta) d\eta \quad (37)$$

$$FV_i = \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) \eta^2 d\eta + \int_0^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) G(\eta) d\eta \quad (38)$$

$$F_i(\eta) = \int_\eta^1 \eta \frac{d\widetilde{\psi}_i(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (39)$$

$$H_i(\eta) = \int_\eta^1 \widetilde{\psi}_i(\eta) d\eta \quad (40)$$

$$G(\eta) = \frac{1}{2} - \frac{\eta^2}{2} \quad (41)$$

Gradiente de pressão:

$$\begin{aligned} \frac{dp(\chi)}{d\chi} = & 2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} AP_{jk} \overline{U}_j^*(\chi) \right) \frac{d\overline{U}_k^*(\chi)}{d\chi} \\ + 2 \sum_{k=1}^{\infty} BP_k \frac{d\overline{U}_k^*(\chi)}{d\chi} - & \frac{2}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \frac{1}{3} - \frac{1}{Re \delta(\chi)^2} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\cos[\mu_j] \mu_j - \cos[0] \mu_j}{N_j^{1/2}} \overline{U}_j^*(\chi) \\ & - \frac{2}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} CP_{jk} \overline{U}_j^*(\chi) \right) \overline{U}_k^*(\chi) - \frac{2}{\delta(\chi)} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \sum_{k=1}^{\infty} DP_k \overline{U}_k^*(\chi) \end{aligned} \quad (42)$$

com os coeficientes escritos nas Equações 43-47:

$$AP_{jk} = \int_0^1 \widetilde{\psi}_j(\eta) \widetilde{\psi}_k(\eta) d\eta \quad (43)$$

$$BP_k = \int_0^1 \eta \widetilde{\psi}_k(\eta) d\eta \quad (44)$$

$$CP_{jk} = \int_0^1 \widetilde{\psi}_j(\eta) \eta \frac{d\widetilde{\psi}_k(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (45)$$

$$DP_k = \int_0^1 \eta^2 \frac{d\widetilde{\psi}_k(\eta)}{d\eta} d\eta \quad (46)$$

$$EP_k = \int_0^1 \eta \widetilde{\psi}_k(\eta) d\eta \quad (47)$$

Equação da Energia:

$$\begin{aligned} & \delta_T(\chi)^2 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} AT_{ijk} \overline{U}_j^*(\chi) + \frac{\delta_T(\chi)}{\delta(\chi)} ATF_{ik} \right) \frac{d\overline{\theta}_k^*(\chi)}{d\chi} + \\ & + \frac{\delta_T(\chi)^2}{2} \frac{d\delta(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} BT_{ij} \overline{U}_j^*(\chi) + \frac{\delta_T(\chi)}{\delta(\chi)} BTF_i \right) \\ & - \delta_T(\chi) \frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} CT_{ijk} \overline{U}_j^*(\chi) + \frac{\delta_T(\chi)}{\delta(\chi)} CTF_{ik} \right) \overline{\theta}_k^*(\chi) \right) \\ & + \delta_T(\chi)^2 \delta(\chi) \sum_{j=1}^{\infty} HT_{ij} \frac{d\overline{U}_j^*(\chi)}{d\chi} \\ & + \delta_T(\chi)^2 \frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} DT_{ij} \overline{U}_j^*(\chi) + \frac{\delta_T(\chi)}{\delta(\chi)} DTF_i \right) \\ & + \delta_T(\chi) \delta(\chi) \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} ET_{ijk} \frac{d\overline{U}_j^*(\chi)}{d\chi} \right) \overline{\theta}_k^*(\chi) \\ & - \delta_T(\chi) \frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} FT_{ijk} \overline{U}_j^*(\chi) + GT_{1ik} - \frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} GT_{2ik} \right) \overline{\theta}_k^*(\chi) \\ & - \delta_T(\chi)^2 \frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} \left(\sum_{j=1}^{\infty} IT_{ij} \overline{U}_j^*(\chi) + \left(JT_{1i} - \frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} JT_{2i} \right) \right) = \frac{\Omega_i^2}{Pe} \overline{\theta}_i^*(\chi) + \frac{\delta_T(\chi)}{Pe} LT_i \end{aligned} \quad (48)$$

Com os coeficientes escritos nas Equações 49-65:

$$AT_{ijk} = \int_0^1 \widetilde{\phi}_i(\eta_t) \widetilde{\psi}_j(\eta) \widetilde{\phi}_k(\eta_t) d\eta_t \quad (49)$$

$$ATF_{ik} = \int_0^1 \widetilde{\phi}_i(\eta_t) \eta_t \widetilde{\phi}_k(\eta_t) d\eta_t \quad (50)$$

$$BT_{ij} = \int_0^1 \widetilde{\phi}_i(\eta_t) \widetilde{\psi}_j(\eta) (1 - \eta_t)^2 d\eta_t \quad (51)$$

$$BTF_i = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \eta (1 - \eta_t)^2 d\eta_t \quad (52)$$

$$CT_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \tilde{\psi}_j(\eta) \eta_t \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (53)$$

$$CTF_{ik} = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \eta \eta_t \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (54)$$

$$DT_{ij} = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \tilde{\psi}_j(\eta) \eta_t (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (55)$$

$$DTF_i = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \eta \eta_t (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (56)$$

$$ET_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) H_j(\eta) \eta_t \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (57)$$

$$FT_{ijk} = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) F_j(\eta) \frac{d\tilde{\phi}_k(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (58)$$

$$GT1_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (59)$$

$$GT2_{ij} = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \eta^2 \frac{d\tilde{\phi}_j(\eta_t)}{d\eta_t} d\eta_t \quad (60)$$

$$HT_{ij} = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) H_j(\eta) (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (61)$$

$$IT_{ij} = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) F_j(\eta) (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (62)$$

$$JT1_i = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (63)$$

$$JT2_i = \frac{1}{2} \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) \eta^2 (1 - \eta_t) d\eta_t \quad (64)$$

$$LT_i = \int_0^1 \tilde{\phi}_i(\eta_t) d\eta_t \quad (65)$$

As condições iniciais do campo hidrodinâmico e térmico são transformadas e escritas como:

$$\overline{U}_j^*(0) = \int_0^1 \widetilde{\psi}_j(\eta) (U^*(0, \eta) - UF(\eta)) d\eta \quad (66)$$

$$\overline{\theta}_j^*(0) = \int_0^1 \widetilde{\phi}_j(\eta_t) \theta^*(0, \eta_t) d\eta_t - \int_0^1 \widetilde{\phi}_j(\eta_t) TF(0, \eta_t) d\eta_t \quad (67)$$

Para resolver o sistema de equações diferenciais acopladas, é necessário definir as equações para as espessuras das camadas limites hidrodinâmica e térmica extraídas de Naveira (2006) e Ozisik (1985), escritas como:

$$\frac{d\delta(\chi)}{d\chi} = 2.50 \chi^{-1/2} Re^{-1/2} \quad (68)$$

$$\frac{d\delta_T(\chi)}{d\chi} = 2.42 Pr^{-1/3} \chi^{-1/2} Re^{-1/2} \quad (69)$$

As Equações 32, 42, 48, 68 e 69 formam um sistema infinito de equações diferenciais parciais unidimensionais para os potenciais transformados. Para fins computacionais, esse sistema é truncado para uma ordem finita suficientemente grande, N (número de autovalores), para o controle de convergência necessário. Uma vez que os potenciais transformados, de forma explícita na coordenada transversal, tenham sido computados e após a adição da solução de filtragem, a distribuição adimensional de velocidade e temperatura é reconstruída por meio da fórmula da inversa em toda a região ao longo do processo.

4 Resultados da pesquisa

A Técnica da Transformada Integral Generalizada (GITT) mostrou ser uma ferramenta importante para resolver o problema proposto, sendo capaz de determinar as espessuras das camadas limites térmica e hidrodinâmica e os perfis de velocidade e temperatura, simultaneamente.

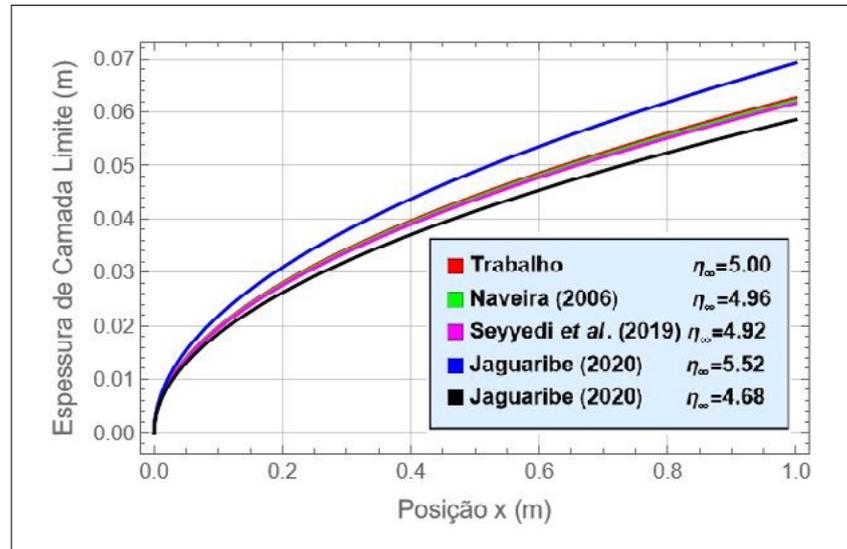
O código computacional desenvolvido no software Mathematica 13.0, versão estudante, incorpora todas as etapas computacionais simbólicas e numéricas no procedimento de solução, usando a rotina NDSolve, sendo validado de diversas formas, incluindo a comparação com a solução de Blasius no campo hidrodinâmico e com resultados obtidos por Naveira (2006) e Seyyedi *et al.* (2019) para o campo térmico.

Na maioria dos trabalhos publicados na literatura, o perfil de velocidade é determinado usando a solução de Blasius e apenas o perfil de temperatura é calculado. Neste trabalho, os problemas hidrodinâmico e térmico são resolvidos simultaneamente, usando as equações de quantidade de movimento e da continuidade para determinar a velocidade e o gradiente de pressão. Em seguida, a equação de energia é usada para calcular o campo de temperatura.

A Figura 2 mostra o comportamento da espessura da camada limite em função da posição x (m), em que se observa que a solução obtida pelo presente trabalho é relativamente próxima da solução de Blasius. O gráfico de espessura da camada limite mostra ainda mais desvios entre a solução proposta e as aproximações de Karman-Pohlhausen de quinta e terceira ordem. Observa-se que essas duas aproximações polinomiais foram escolhidas por Eyo, Ogbonna e Ekpenyong (2012); nos cálculos de erro para o parâmetro de similaridade, esses autores obtiveram 7,18% e 3,58%, respectivamente.

Figura 2 ►

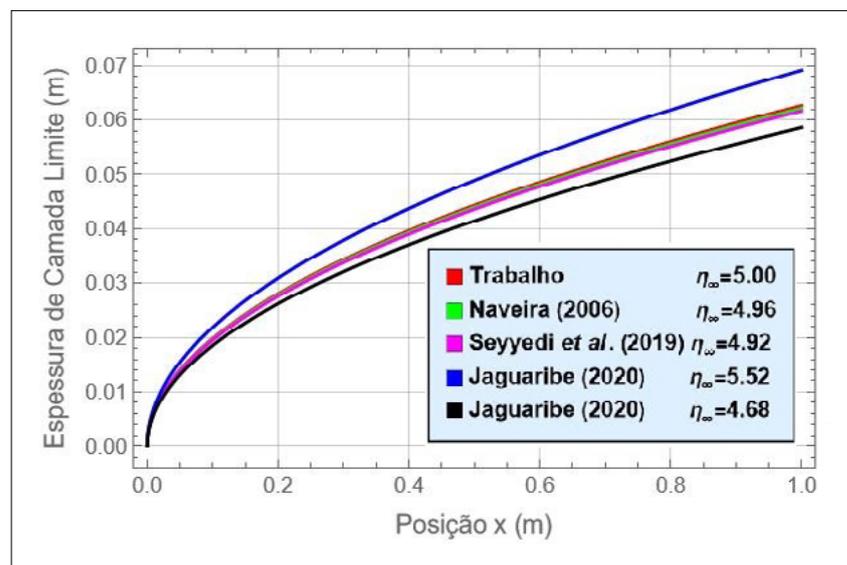
Comparação da espessura da camada limite hidrodinâmica com modelos polinomiais inteiros.
Fonte: dados da pesquisa



A Figura 3 mostra o comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica calculada pelo presente trabalho e o compara com Naveira (2006), que usa o método de similaridade (equação de Blasius), com Seyyedi *et al.* (2019), que utilizam uma nova proposta para o perfil de velocidade, na qual usam um polinômio de ordem m , encontrando $m = 2,5243$, e com Jaguaribe (2020), que utiliza a série de Maclaurin, obtendo dois valores de X (56,0495 e 58,8154) para $N = 461$ (número de termos da série), com parâmetros de similaridade $\eta_\infty = 5,52$ e $\eta_\infty = 4,68$, respectivamente. Pode-se verificar que o trabalho usando GITT está mais próximo do trabalho de Naveira (2006).

Figura 3 ►

Comparação da espessura da camada limite hidrodinâmica com outros modelos.
Fonte: dados da pesquisa



A Figura 4 mostra o comportamento da velocidade adimensional em função das posições x e y ao longo da placa. Pode-se verificar que, na entrada da placa, existe uma perturbação proveniente de a velocidade estar ainda em desenvolvimento e depender das posições x e y . À medida que o escoamento se desloca ao longo da placa, a velocidade atinge a situação completamente desenvolvida, quando o perfil se torna parabólico, característica na qual a velocidade depende apenas da posição y .

Figura 4 ►

Perfil da velocidade adimensional em função das posições x e y .

Fonte: dados da pesquisa

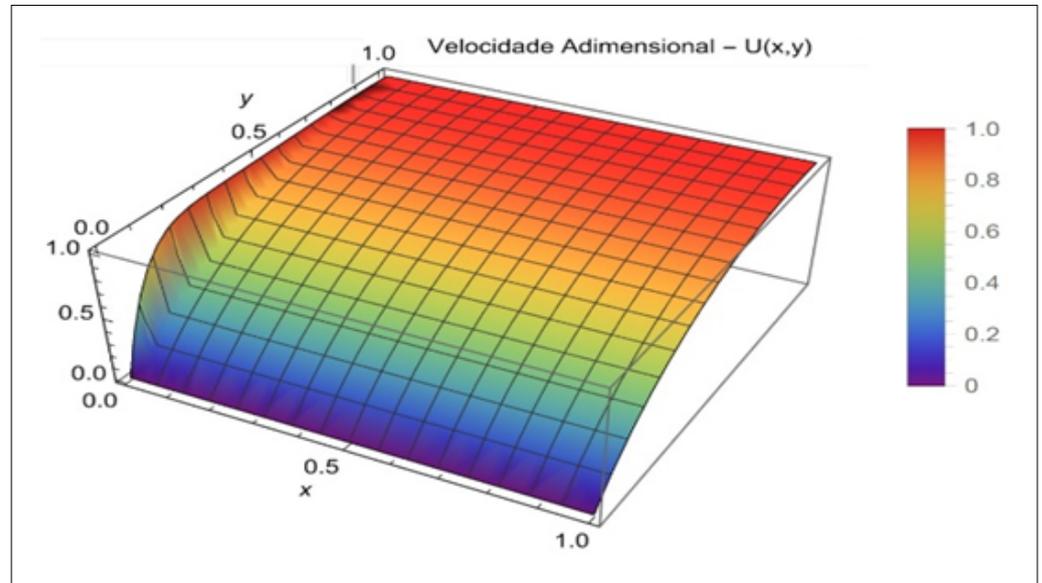


Tabela 1 ▼

Espessura da camada limite hidrodinâmica em função da posição x (m).

Fonte: dados da pesquisa

A Tabela 1 mostra o comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica em comparação com Naveira (2006) e a solução exata, obtendo-se excelentes resultados, com erros aceitáveis da ordem de 1%, o que permite comprovar que o modelo adotado utilizando a rotina NDSolve do software Mathematica 13.0, versão estudante, pode ser perfeitamente usado.

x (m)	Trabalho $\eta_\infty = 5,00$	Solução exata $\eta_\infty = 5,00$	Naveira (2006) $\eta_\infty = 4,96$
1	0,062649	0,062650	0,062149
0,9	0,059434	0,059435	0,058960
0,8	0,056035	0,056036	0,055587
0,7	0,052416	0,052417	0,051997
0,6	0,048528	0,048528	0,048140
0,5	0,044300	0,044300	0,043946
0,4	0,039623	0,039623	0,039306
0,3	0,034314	0,034315	0,034040
0,2	0,028017	0,028018	0,027794
0,1	0,019811	0,019812	0,019653
10^{-6}	0,000063	0,000063	0,000065

A Tabela 2 mostra o comportamento da espessura da camada limite hidrodinâmica comparando-o com Jaguaribe (2020), que utiliza a série de Maclaurin, obtendo dois valores de X (56,0495 e 58,8154) para $N = 461$ (número de termos da série), obtendo os parâmetros de similaridade $\eta_\infty = 5,52$ e $\eta_\infty = 4,68$, respectivamente. A partir disso, podem-se determinar os erros relativos à solução exata, da ordem de 10,36% e 6,49%, respectivamente. Esses erros obtidos por Jaguaribe (2020) devem-se à metodologia aplicada, a qual utiliza uma série de Maclaurin com 461 termos para resolver o problema proposto, encontrando η_∞ distante da solução exata.

Tabela 2 ▼

Comparação da espessura da camada limite hidrodinâmica com modelo usando série de Maclaurin.

Fonte: dados da pesquisa

x (m)	Trabalho $\eta_\infty = 5,00$	Jaguaribe (2020) $\eta_\infty = 5,52$	Jaguaribe (2020) $\eta_\infty = 4,68$
1	0,062649	0,069143	0,058584
0,9	0,059434	0,065595	0,055578
0,8	0,056035	0,061843	0,052399
0,7	0,052416	0,057849	0,049015
0,6	0,048528	0,053558	0,045379
0,5	0,044300	0,048892	0,041425
0,4	0,039623	0,043730	0,037052
0,3	0,034314	0,037871	0,032088
0,2	0,028017	0,030922	0,026200
0,1	0,019811	0,021865	0,018526
10^{-6}	0,000063	0,000072	0,000061

Para comparar os resultados do campo de temperatura, utilizam-se os dados adotados por Naveira (2006). O ar sempre foi o fluido refrigerante e os valores numéricos adotados nas simulações para os parâmetros governantes relacionados estão listados na Tabela 3.

Tabela 3 ►

Propriedades físicas do ar e da placa para análise do problema proposto aplicado no estudo para comparação e validação do modelo.

Fonte: Naveira (2006)

Parâmetros	Valores
Comprimento da placa, L	0,1 m
Velocidade de corrente livre, U_∞	1 m/s
Temperatura inicial, T_∞	20 °C
Coeficiente de transferência de calor, α	$2,22 \times 10^{-5}$ m ² /s
Condutividade térmica, k	0,0262 W/(m °C)
Viscosidade cinemática, ν	$1,57 \times 10^{-5}$ m ² /s
Calor de referência, ϕ_{ref}	100 W/m ²

A Tabela 4 mostra a convergência da temperatura variando o número de autovalores (N_{aut}) de 10 a 120 autovalores, verificando-se que é alcançada a convergência para a terceira casa decimal.

Tabela 4 ▶

Convergência da temperatura em função do número de autovalores.
 Fonte: dados da pesquisa

	x (m)		
Nauv	0,50	0,75	1,00
10	28,2473	30,1009	31,6635
20	28,2814	30,1426	31,7117
40	28,2984	30,1634	31,7357
60	28,3040	30,1738	31,7437
80	28,3068	30,1750	31,7490
100	28,3078	30,1758	31,7500
110	28,3085	30,1766	31,7509
120	28,3096	30,1772	31,7516

A Tabela 5 mostra o comportamento da temperatura usando 120 autovalores e a comparação com os resultados obtidos por Naveira (2006) e Seyyedi *et al.* (2019), mostrando boa concordância.

Tabela 5 ▶

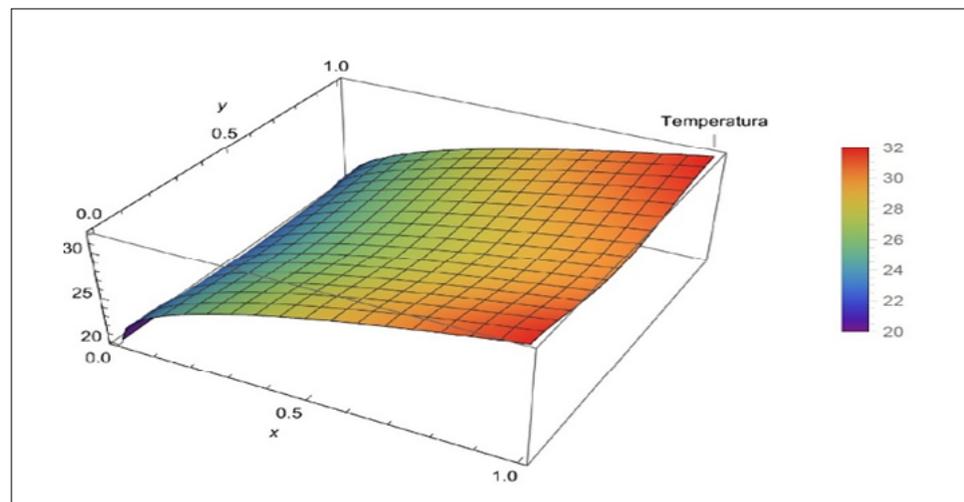
Temperatura (°C) em função da posição x (m).
 Fonte: dados da pesquisa

x (m)	Trabalho (°C)	Naveira (2006)	Seyyedi <i>et al.</i> (2019)
0,10	23,7162	23,7178	23,7171
0,25	25,8758	25,8717	25,8768
0,50	28,3096	28,3008	28,3106
0,75	30,1772	30,1652	30,1782
1,00	31,7516	31,7370	31,7526

A Figura 5 mostra o comportamento da temperatura em função das posições x e y ao longo da placa, utilizando a técnica da transformada integral generalizada, apresentando uma boa harmonia com a solução obtida por Naveira (2006). Vale ressaltar que, em relação à posição x, a distribuição da temperatura é semelhante ao perfil da espessura da camada limite térmica, pois a posição y é muito pequena, não havendo variação significativa nessa direção. Isso pode ser comprovado com os valores apresentados na Tabela 4, na qual se fixou uma posição em y e variou-se a posição x.

Figura 5 ▶

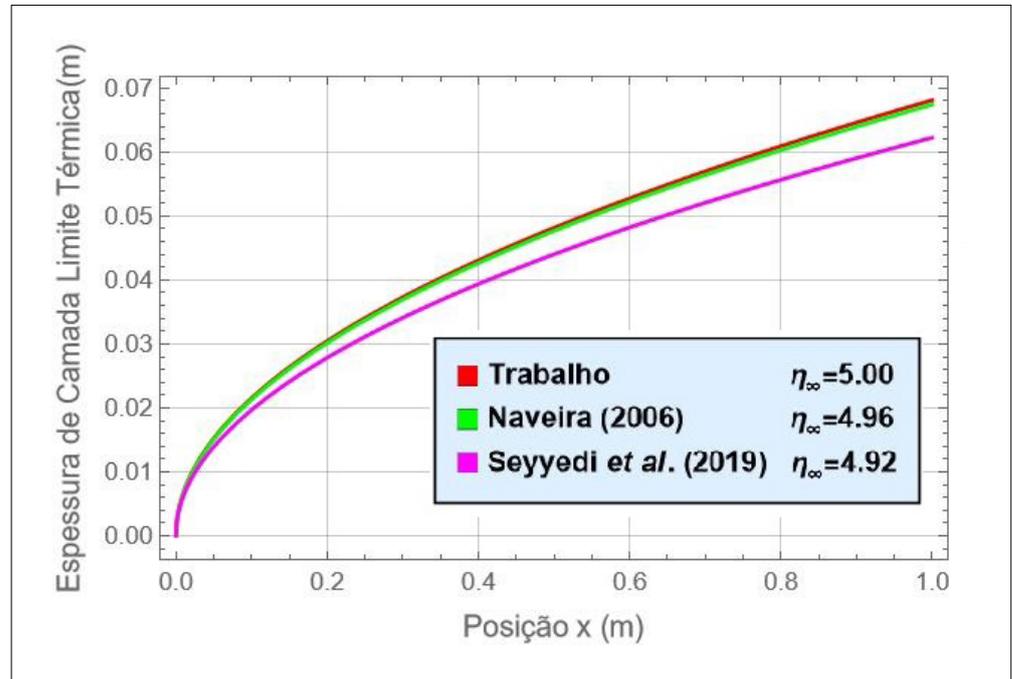
Perfil de temperatura em função das posições x e y.
 Fonte: dados da pesquisa



A Figura 6 mostra o comportamento da espessura da camada limite térmica calculada pelo presente trabalho e comparada com Naveira (2006) e Seyyedi *et al.* (2019). Verifica-se que a espessura da camada limite térmica proposta se aproxima mais de Naveira (2006) do que de Seyyedi *et al.* (2019), os quais possuem parâmetros de similaridade $\eta_\infty = 4,96$ e $\eta_\infty = 4,92$, respectivamente. Isso só corrobora que, quanto mais próximo for o parâmetro de similaridade de 5,00 (solução exata), mais preciso será o resultado.

Figura 6 ►

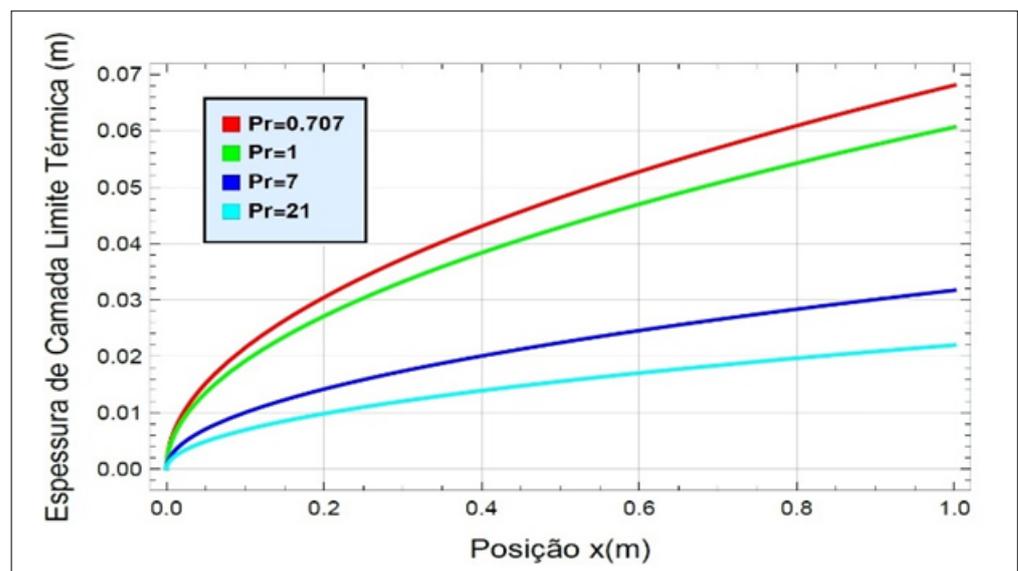
Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x (m).
Fonte: dados da pesquisa



A Figura 7 mostra o comportamento da espessura da camada limite térmica variando o número de Prandtl (Pr). Pode-se verificar que a espessura da camada limite térmica aumenta à medida que o Pr diminui. Isso prova que o modelo adotado está correto, pois, na literatura, para $Pr < 1$, a espessura da camada limite térmica é maior que a espessura da camada limite hidrodinâmica, e para $Pr > 1$, ocorre o contrário.

Figura 7 ►

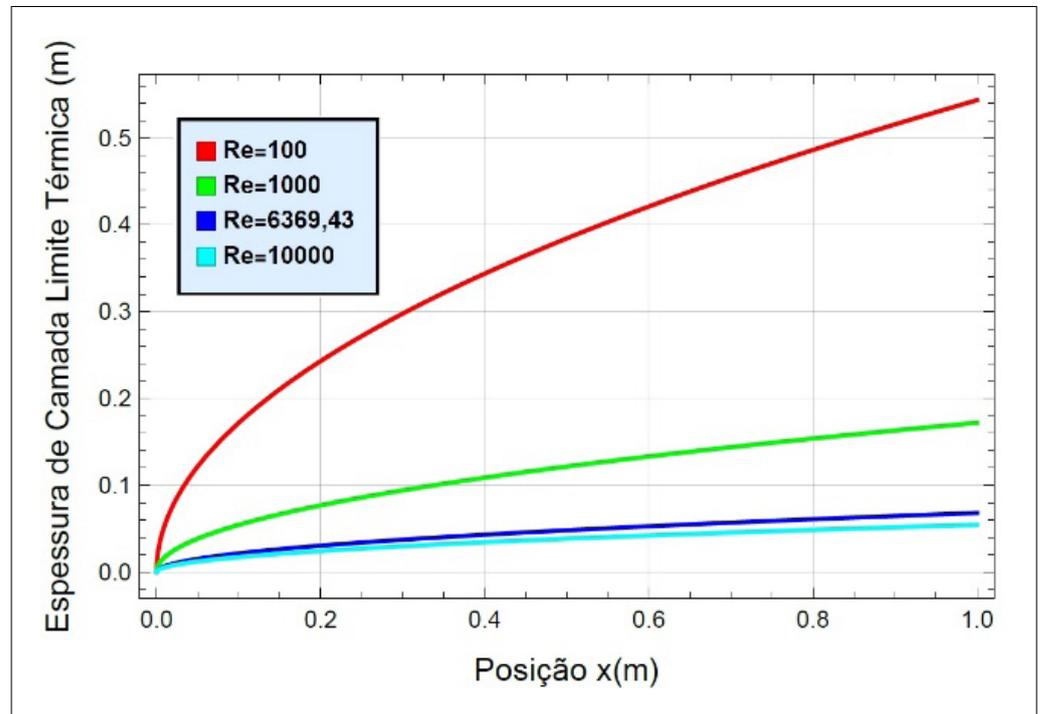
Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição x (m), variando o número de Prandtl (Pr).
Fonte: dados da pesquisa



A Figura 8 mostra o comportamento da espessura da camada limite térmica variando o número de Reynolds (Re). Pode-se verificar que a espessura da camada limite térmica aumenta à medida que o número de Reynolds diminui.

Figura 8 ►

Comportamento da espessura da camada limite térmica em função da posição $x(m)$, variando o número de Reynolds (Re).
Fonte: dados da pesquisa



5 Conclusões

O presente trabalho preocupou-se com as soluções e a interpretação física de um problema conjugado condução-convecção externa em um escoamento laminar sobre uma placa plana de espessura não desprezível e comprimento finito, em regime permanente.

A solução para a determinação das espessuras das camadas limites hidrodinâmica e térmica permite a obtenção de resultados que podem ser utilizados pela Engenharia para projetos e para o desenvolvimento de novos equipamentos nos campos hidrodinâmico e térmico.

A contribuição mais importante da pesquisa foi conseguir determinar a espessura da camada limite hidrodinâmica sem ter que considerar a hipótese de Blasius (método de similaridade) e, além disso, resolver os problemas hidrodinâmico e térmico de maneira simultânea.

Os resultados obtidos na determinação da espessura da camada limite hidrodinâmica foram muito próximos dos resultados da solução exata, com um erro inferior a 1%. Isso corrobora a validação do modelo proposto. Além disso, comparamos com as aproximações polinomiais de Karman-Pohlhausen de terceira e quinta ordem (Eyo; Ogbonna; Ekpenyong, 2012), mostrando que essas aproximações causam um desvio maior em relação à solução analítica exata. Os resultados também foram comparados com a solução obtida por Jaguaribe (2020), utilizando a série de Maclaurin, a qual também apresentou um desvio em relação à solução analítica exata.

Os resultados obtidos no campo térmico também foram muito satisfatórios quando comparados com os resultados encontrados em Naveira (2006) e Seyyedi *et al.* (2019),

além de comprovarem que a espessura da camada limite térmica é inversamente proporcional aos números de Prandtl e de Reynolds, conforme previsto na literatura.

Como trabalhos futuros, pretende-se fazer um estudo paramétrico para encontrar uma nova relação das camadas limites hidrodinâmica e térmica com número de Reynolds e número de Prandtl.

Financiamento

Esta pesquisa não recebeu financiamento externo.

Conflito de interesses

Os autores declaram não haver conflito de interesse financeiro, pessoal ou institucional com as informações e os resultados divulgados por meio do presente manuscrito.

Referências

ADEBISI, A. R. An analysis of boundary layer flow over a flat plate using modified Adomian decomposition method. **Scholars Journal of Engineering and Technology (SJET)**, v. 3, n. 4C, p. 520-528, 2015. Disponível em: <https://saspublishers.com/media/articles/SJET34C520-628.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2022.

ASAITHAMBI, A. On solving the nonlinear falkner-skan boundary-value problem: a review. **Fluids**, v. 6, n. 4, 153, 2021. DOI: <https://doi.org/10.3390/fluids6040153>.

BOGNAR, G. Similarity method for boundary layer flow of a non-Newtonian viscous fluid at a convectively heated surface. **Thermal Science**, v. 21, n. 6B, p. 2795-2802, 2017. DOI: <https://doi.org/10.2298/TSCI150722208B>.

COTTA, R. M. **Integral transforms in computational heat and fluid flow**. Boca Raton: CRC Press, 1993.

COTTA, R. M.; KNUPP, D. C.; QUARESMA, J. N. N. Analytical methods in heat transfer. In: KULACKI, F. A. **Handbook of Thermal Science and Engineering**. Cham: Springer, 2018. p. 61-126. DOI: https://doi.org/10.1007/978-3-319-26695-4_2.

EYO, A.; OGBONNA, N.; EKPENYONG, M. Comparison of the exact and approximate values of certain parameters in laminar boundary layer flow using some velocity profiles. **Journal of Mathematics Research**, v. 4, n. 5, p. 17-29, 2012. DOI: <https://doi.org/10.5539/jmr.v4n5p17>.

FAREO, A. G. A note on the transformation of boundary value problems to initial value problems: the iterative transformation method. **Applied Mathematics and Computation**, v. 415, 126692, 2022. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.amc.2021.126692>.

FAZIO, R. A non-iterative transformation method for an extended Blasius problem. **Mathematical Methods in the Applied Sciences**, v. 44, n. 2, p. 1996-2001, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1002/mma.6902>.

FAZIO, R. The non-iterative transformation method. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 114, p. 41-48, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.04.008>.

FREIRE, A. P. S. **Teoria de camada limite**. Pantheon: Repositório Institucional da UFRJ. Rio de Janeiro: UFRJ, 2012. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11422/7857>. Acesso em: 10 jan. 2022.

JAGUARIBE, E. F. Conflicting aspects in the flat plate boundary layer conventional solution. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2020, 2964231, 2020. DOI: <https://doi.org/10.1155/2020/2964231>.

MEDEIROS, M. J.; SANTOS, C. A. C. Theoretical analysis and determination of hydrodynamic and thermal boundary layers through of generalized integral transform technique. *In*: INTERNATIONAL CONGRESS OF MECHANICAL ENGINEERING, 26., 2021, Virtual Congress. **Proceedings** [...]. Florianópolis: ABCM – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE ENGENHARIA E CIÊNCIAS MECÂNICAS, 2021. Disponível em: <https://www.sistema.abcm.org.br/articleFiles/download/32543>. Acesso em: 21 jul. 2022.

MONTEIRO, T. B. **Difusão anômala de um fluido em conduto com superfícies planas via cálculo fracionário**. 2021. Dissertação (Mestrado em Física) – Universidade Federal de São João del-Rei, Ouro Branco, 2021. Disponível em: <https://ufsj.edu.br/portal2-repositorio/File/ppgf/DEFESAS/DISSERTACAO%20FINAL%20POS%20CORRECOES%20-%20THIAGO%20MONTEIRO.pdf>. Acesso em: 21 jul. 2022.

NAVEIRA, C. P. **Soluções híbridas para problemas conjugados condução-convecção externa transiente**. 2006 Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2006. Disponível em: https://w1files.solucaoatrio.net.br/atrio/ufRJ-pem_upl/THESIS/687/pemufRJ2006msccarolinapalmanaveira.pdf. Acesso em: 21 jul. 2022.

NAVEIRA, C.; LACHI, M.; COTTA, R. M.; PADET, J. Integral transform solution of transient forced convection in external flow. **International Communications in Heat and Mass Transfer**, v. 34, n. 6, p. 703-712, 2007. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.icheatmasstransfer.2007.03.014>.

OLIVEIRA, A. C.; ALMEIDA, A. C. L. Numerical solution of boundary layer equations based on optimization: the Ostrach and Blasius models. **International Journal of Non-Linear Mechanics**, v. 113, p. 103-111, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.ijnonlinmec.2019.03.017>.

OZISIK, M. N. **Heat transfer: a basic approach**. New York: McGraw-Hill, 1985.

PARVEEN, S. Numerical solution of non linear differential equation by using shooting techniques. **International Journal of Mathematics and Its Applications**, v. 4, n. 1A, p. 93-100, 2016. Disponível em: <https://ijmaa.in/index.php/ijmaa/article/view/549>. Acesso em: 21 jul. 2022.

SANTOS, J. C.; SILVA, S. A. Solução analítica aproximada para convecção forçada de metais líquidos. **Revista Principia – Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB**,

João Pessoa, n. 12, p. 43-46, 2005. Disponível em: <https://periodicos.ifpb.edu.br/index.php/principia/article/view/310/267>. Acesso em: 10 jan. 2022.

SEYYEDI, S. M.; DOGONCHI, A. S.; HASHEMI-TILEHNOEE, M.; GANJI, D. D. Improved velocity and temperature profiles for integral solution in the laminar boundary layer flow on a semi-infinite flat plate. **Heat Transfer – Asian Research**, v. 48, n. 1, p. 182-215, 2019. DOI: <https://doi.org/10.1002/htj.21378>.

VELOSO, D. A.; CABRAL, C. A.; LIMA, F. A. Análise do campo de temperatura e do número de Nusselt local na convecção forçada assimétrica de fluidos não-newtonianos. **Revista Principia – Divulgação Científica e Tecnológica do IFPB**, João Pessoa, n. 49, p. 68-79, jun. 2020. DOI: <http://dx.doi.org/10.18265/1517-03062015v1n49p68-79>.