

SUBMETIDO 13/09/2021

APROVADO 11/11/2021

PUBLICADO ON-LINE 12/11/2021

PUBLICADO 10/07/2023

EDITORA ASSOCIADA

Nelma Mirian Chagas Araújo Meira

DOI: <http://dx.doi.org/10.18265/1517-0306a2021id6358>

ARTIGO ORIGINAL

Dimensionamento de vigas protendidas contínuas pelo método das cargas equivalentes

 Tamiris Luiza Soares Lanini ^[1]
 Felipe Nascimento Arroyo ^{[2]*}
 Roberto Chust Carvalho ^[3]
 André Luis Christoforo ^[4]
 Fernando Menezes de Almeida Filho ^[5]

[1] tamirisluiza@hotmail.com

[2] lipe.arroyo@gmail.com

[3] robertochustcarvalho@gmail.com

[4] christoforoal@yahoo.com.br

[5] almeidafilho@ufscar.br

Departamento de Engenharia
Civil / Universidade Federal de
São Carlos (UFSCar), Brasil

RESUMO: O concreto protendido objetiva reduzir ou anular os efeitos de tração (fissuração) em um elemento de concreto. Considerando elementos isostáticos, o equacionamento e o cálculo consideram a adição de um momento fletor oriundo da aplicação do esforço de protensão a uma excentricidade do centro de gravidade da peça. Todavia, em estruturas hiperestáticas, o equacionamento e o cálculo são mais complexos, pois há consideração dos hiperestáticos de protensão oriundos da restrição do deslocamento no apoio. Portanto, é usual a representação pela superposição de efeitos de um sistema isostático protendido sob os efeitos dos esforços hiperestáticos oriundos da protensão. Entre as metodologias de cálculo existentes, tem-se o método da carga equivalente convencional proposto por Lin (1963). Nesse contexto, o presente estudo objetivou apresentar as considerações da literatura referentes ao momento hiperestático de protensão considerando esse método, em que foi calculada a armadura de protensão no estado limite último de uma viga protendida contínua, proposta por Kuchler (1993). Para tanto, apresenta-se também a determinação das perdas de protensão imediatas e ao longo da vida útil no cabo equivalente considerado. Ao final, a armadura de protensão obtida se assemelha ao exposto por Kuchler (1993), atestando a veracidade da metodologia empregada.

Palavras-chave: estado limite último; estrutura hiperestática; hiperestático de protensão; perdas de protensão.

Design of continuous prestressed beams using the equivalent loads method

ABSTRACT: Prestressed concrete aims to reduce or annul the tensile (cracking) effects in a concrete element. Regarding isostatic elements, the equation and calculation consider the addition of a bending moment arising from the application of the prestressing effort to an eccentricity of the part gravity center. However, in hyperstatic structures, the equation and calculation are more complex, as there is consideration of prestressing hyperstatic arising from the displacement restriction in the support. Therefore, the representation

*Autor para correspondência.

by the effects superposition of an isostatic system prestressed under the effects of hyperstatic efforts arising from prestressing is common. Among the existing calculation methodologies, there is the conventional equivalent load method proposed by Lin (1980). In this context, the present study aimed to present the considerations in the literature regarding the hyperstatic moment of prestressing considering this method, wherein the prestressing reinforcement in the ultimate limit state of a continuous prestressed beam proposed by Kuchler (1993) was calculated. For that, the determination of the immediate prestressing losses and throughout the useful life of the considered equivalent cable is also presented. In the end, the prestressed reinforcement obtained is similar to that exposed by Kuchler (1993), attesting to the methodology veracity.

.....
Keywords: hyperstatic structure; prestressing hyperstatic; prestressing losses; ultimate limit state.

1 Introdução

O concreto protendido, no qual a peça é previamente solicitada, tem como intuito reduzir ou anular os efeitos de tração (fissuração) em um elemento de concreto (O'HEGARTY *et al.*, 2021). No Brasil, esse sistema é utilizado desde 1948 como solução em projetos compostos por vãos grandes, pois, usualmente, trabalha-se com seções transversais que proporcionam o aproveitamento máximo dos materiais componentes e a redução do peso próprio (AL-FAKHER *et al.*, 2021).

Considerando-se elementos isostáticos, o equacionamento e cálculo de peças protendidas é de simples determinação (LI *et al.*, 2021). Trata-se da adição de um momento fletor oriundo da aplicação do esforço de protensão a uma excentricidade do centro de gravidade da peça (CARVALHO, 2017).

Todavia, em estruturas hiperestáticas, o equacionamento e cálculo é mais complexo. Nesses casos, devido à hiperestaticidade da estrutura, podem surgir reações nos apoios, denominados “hiperestáticos de protensão” (CHAVES; CARVALHO; SARTORTI, 2018). Tal efeito altera o diagrama de momentos de flexão do elemento e, portanto, modifica as tensões na estrutura (SILVA; SÁNCHEZ FILHO, 2021).

A incógnita atrelada a esse efeito é a determinação da magnitude do hiperestático de protensão, justificada pela imprecisão de cálculo em função das perdas de protensão que ocorrem ao longo do traçado dos cabos. Assim sendo, estudos realizados preveem distintas metodologias de cálculo para determinação do hiperestático de protensão, tais como: método das cargas equivalentes (LIN, 1963), método da flexibilidade, método das cargas nodais (GUYON, 1953) e método das linhas de influência (KONG, 2004).

De modo a contribuir no estudo do hiperestático de protensão e em sua determinação analítica, este estudo apresenta uma aplicação numérica da determinação do hiperestático de protensão e do dimensionamento da armadura de protensão, no estado limite último, considerando o método das cargas equivalentes proposto por Lin (1963), devido à facilidade de aplicação.

2 Método da pesquisa

Tratando-se de estruturas protendidas, há a tração dos cabos atuantes que, por meio da ancoragem direta de fios ou cordoalhas (pré-tração) ou da ancoragem dos cabos em regiões internas ou externas (pós-tração ou protensão externa), imprimem esforços de compressão no elemento.

Por sua vez, a força de protensão gera tensões variáveis ao longo de uma seção de cálculo devido ao traçado definido (e a excentricidades em relação ao eixo de gravidade do elemento), resultando no momento fletor de protensão, além da adição das tensões de compressão oriundas da força normal na seção.

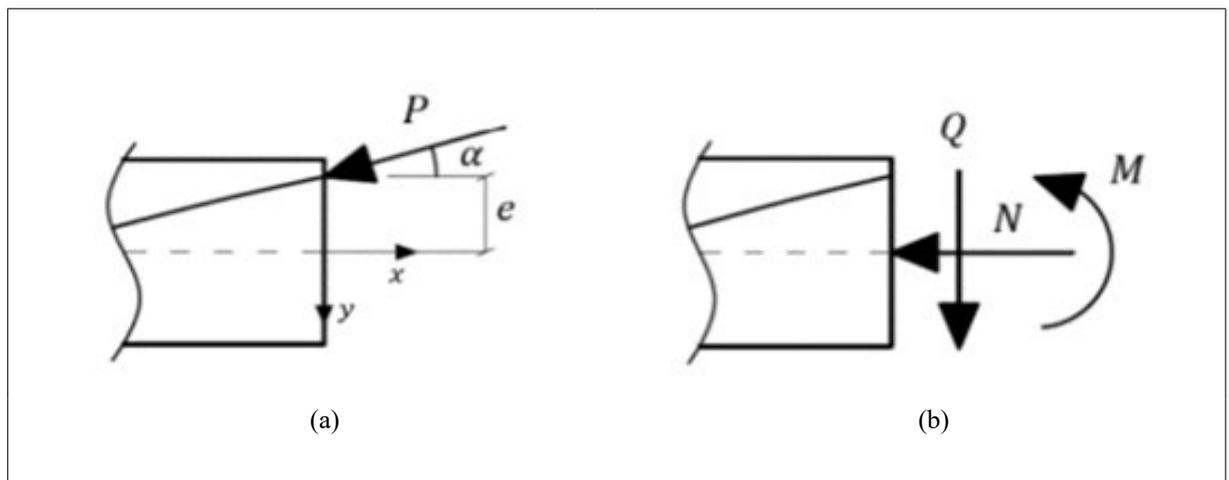
Figura 1 ▼

Esquema de forças em elementos isostáticos protendidos: (a) seção de uma viga sob protensão e (b) sistema equivalente de esforços gerados pela protensão.

Fonte: adaptado de Saba (2018)

Ressalta-se que a protensão é um sistema autoequilibrado, ou seja, em estruturas isostáticas há somente solicitações internas (não há reações de apoio). Tratando-se de estruturas hiperestáticas, o efeito da protensão é representado por uma parcela isostática de esforços e por solicitações hiperestáticas.

Os esforços isostáticos de protensão são determinados pela força de protensão (P) aplicada em uma seção – considerando um ângulo α entre a tangente ao traçado do cabo e a horizontal – e pela excentricidade (e) do cabo no trecho em questão, como apresenta a Figura 1.



Dessa forma, as solicitações normais (N), cortantes (Q) e de momento fletor (M) são dadas pelas Equações 1 a 3, respectivamente. Importante destacar que, em razão de a inclinação dos cabos ser geralmente pequena, pode-se dizer que $\cos \alpha \cong 1$.

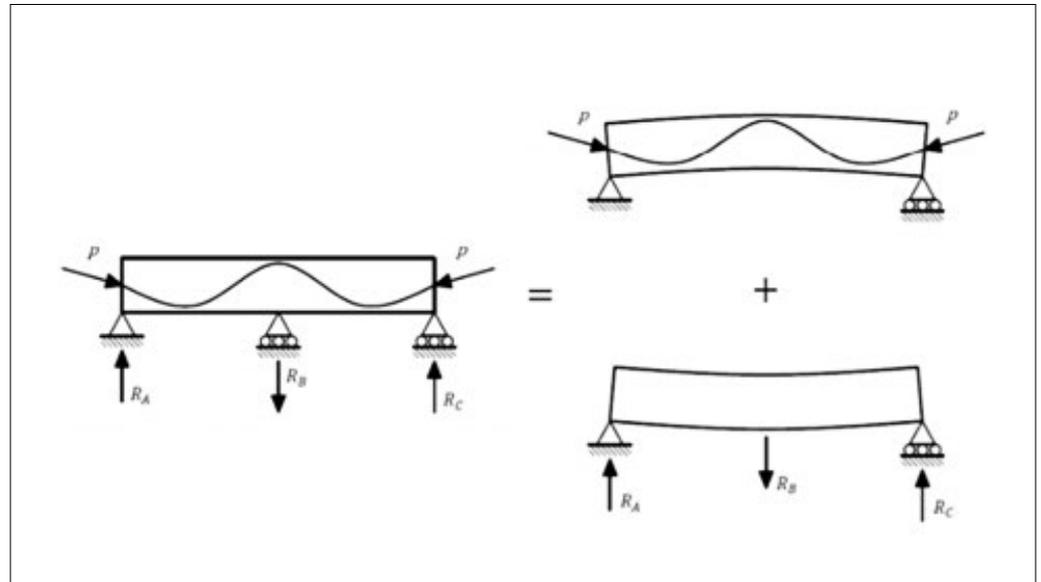
$$N = P \cdot \cos \alpha = P \quad (1)$$

$$Q = P \cdot \sin \alpha \quad (2)$$

$$M = -P \cdot \cos \alpha \cdot e = -P \cdot e \quad (3)$$

Em estruturas hiperestáticas, há ainda a consideração dos hiperestáticos de protensão oriundos da restrição do deslocamento no apoio. Portanto, é usual a representação pela superposição de efeitos de um sistema isostático protendido sob os efeitos dos esforços hiperestáticos oriundos da protensão, como ilustra a Figura 2.

Figura 2 ▶
Esquema de uma viga hiperestática protendida.
Fonte: adaptado de Saba (2018)



Desse modo, pode-se definir o momento fletor total em um ponto x ($M_{tot,x}$) como a soma das parcelas do momento isostático no ponto considerado ($M_{iso,x}$) com o momento hiperestático oriundo da protensão ($M_{hiper,x}$), conforme a Equação 4.

$$M_{tot,x} = M_{iso,x} + M_{hiper,x} \quad (4)$$

Entre as metodologias de cálculo do momento hiperestático de protensão, tem-se o método da carga equivalente convencional (LIN, 1963). Devido à difusão e à facilidade atrelada à conceituação, este será considerado para o presente estudo.

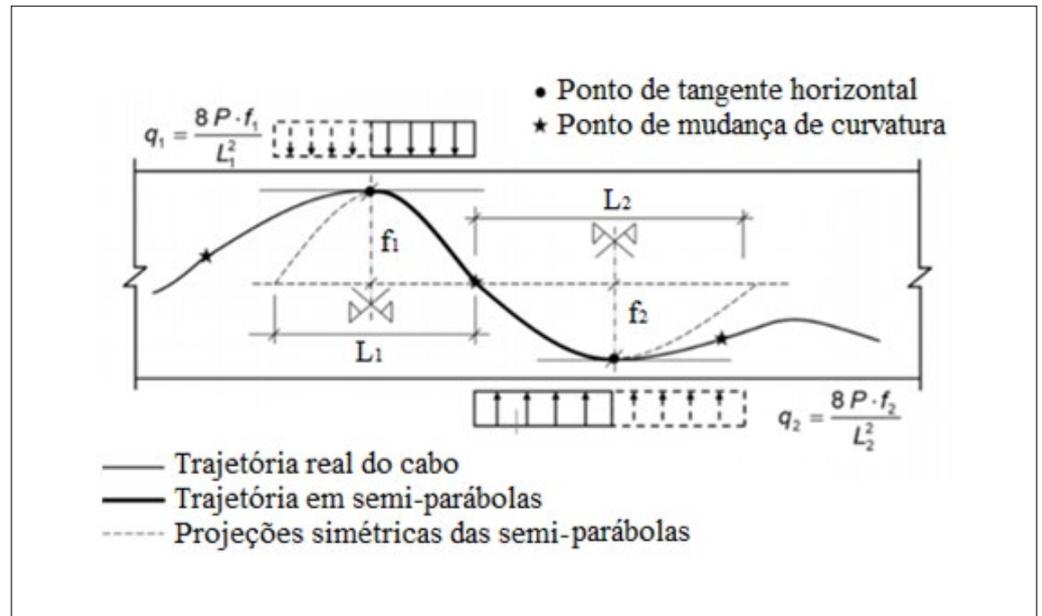
Nessa metodologia empregada por Lin (1963), a premissa de cálculo é dada pela determinação dos momentos fletores de protensão pela transformação dos efeitos de protensão em um cabo parábólico em cargas verticais. Para tanto, propõe-se que as forças longitudinais de atrito e transversal de curvatura sejam substituídas por cargas verticais uniformemente distribuídas. Por meio da adoção de um sistema referencial com origem no eixo de simetria da parábola e pela consideração do ângulo α de pequena magnitude, através de meios matemáticos, obtém-se tal carga vertical ($q_{(x)}$) uniformemente distribuída pela Equação 5 (CARVALHO, 2017).

$$q_{(x)} = \frac{8 \cdot P \cdot f}{L^2} \quad (5)$$

na qual: P é a força de protensão média; f , a flecha máxima do cabo na seção considerada; e L , o trecho considerado.

Tais considerações são evidenciadas na Figura 3.

Figura 3 ▶
Cargas equivalentes em um traçado genérico.
Fonte: adaptado de Saba (2018)



Como evidenciado, a consideração da direção de aplicação do carregamento uniformemente distribuído ocorre conforme a orientação da curvatura da parábola no trecho considerado. Aplicando-se as cargas equivalentes nos respectivos trechos no sistema estrutural, obtêm-se esforços similares aos produzidos pela protensão.

Os momentos fletores obtidos pelo método da carga equivalente são os momentos totais de protensão $M_{tot,x}$, e, assim, o momento de protensão pode ser determinado pela Equação 4.

Ressalta-se que as cargas equivalentes devem ser autoequilibradas. Ainda, a divisão dos trechos e a força de protensão (P) considerada são um processo bastante sensível e de difícil automatização. Para um melhor esclarecimento da metodologia, o passo a passo será indicado nos resultados.

2.1 Viga contínua estudada

De modo a ilustrar quantitativamente os conceitos aqui abordados, este estudo apresenta o dimensionamento da armadura de protensão considerando uma viga contínua protendida. O exemplo numérico é baseado na viga contínua protendida apresentada por Kuchler (1993), ilustrada na Figura 4. Admite-se, para simplificação dos cálculos, seção transversal constante ao longo do vão e classe de agressividade ambiental III. De modo a investigar o hiperestático de protensão, a análise será relacionada somente ao apoio do meio do vão. A Tabela 1 indica as propriedades da seção.

Figura 4 ▶

Seção transversal da viga contínua protendida.

Fonte: adaptado de Kuchler (1993)

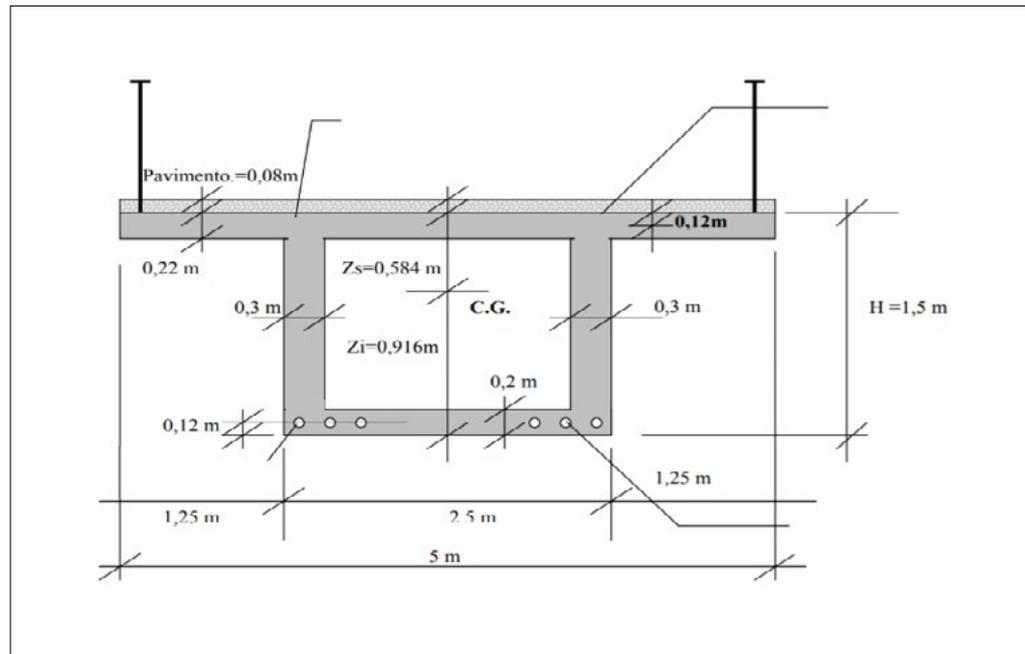


Tabela 1 ▶

Propriedades geométricas da seção extraídas com o auxílio do AutoCad.

Fonte: dados da pesquisa

Altura (H)	1,50 m
Área de concreto (A_c)	2,248 m ²
Inércia (I_c)	0,669 m ⁴
Distância do CG à face superior (Z_s)	0,584 m
Distância do CG à face inferior (Z_i)	0,916 m
Módulo de resistência superior (W_s)	1,145 m ³
Módulo de resistência inferior (W_i)	0,731 m ³

Para o cálculo das ações atuantes e perdas de protensão, o livro do Carvalho (2017) foi adotado como referência.

3 Resultados da pesquisa

Nesta seção será apresentado o passo a passo para o dimensionamento da estrutura proposta na Figura 4.

3.1 Ações atuantes

Inicialmente, devem-se calcular os momentos oriundos das cargas permanentes e variáveis. Considera-se viga contínua, com vão livre entre apoios equivalente a 26,5 metros, totalizando 53 metros. Ainda, segundo Kuchler (1993), sobre a extensão de cinco metros da viga (medida transversal) haverá sobrecarga de 10 kN/m, oriunda de um pavimento com espessura de oito centímetros. A carga acidental equivale a 40 kN/m.

- Cargas permanentes:

- Peso próprio:

$$P_{próp.} = A_c \cdot \gamma_c = 2,248 \cdot 25 = 56,20 \text{ kN/m}$$

- Sobrecarga:

$$P_{sc} = 10 \text{ kN/m}$$

- Total:

$$g = P_{próp.} + P_{sc} = 66,20 \text{ kN/m}$$

- Momento fletor no meio do vão:

$$M_g = \frac{g \cdot l^2}{8} = \frac{66,20 \cdot 26,50^2}{8} = 5.811,12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

- Carga variável:

- Momento fletor no meio do vão:

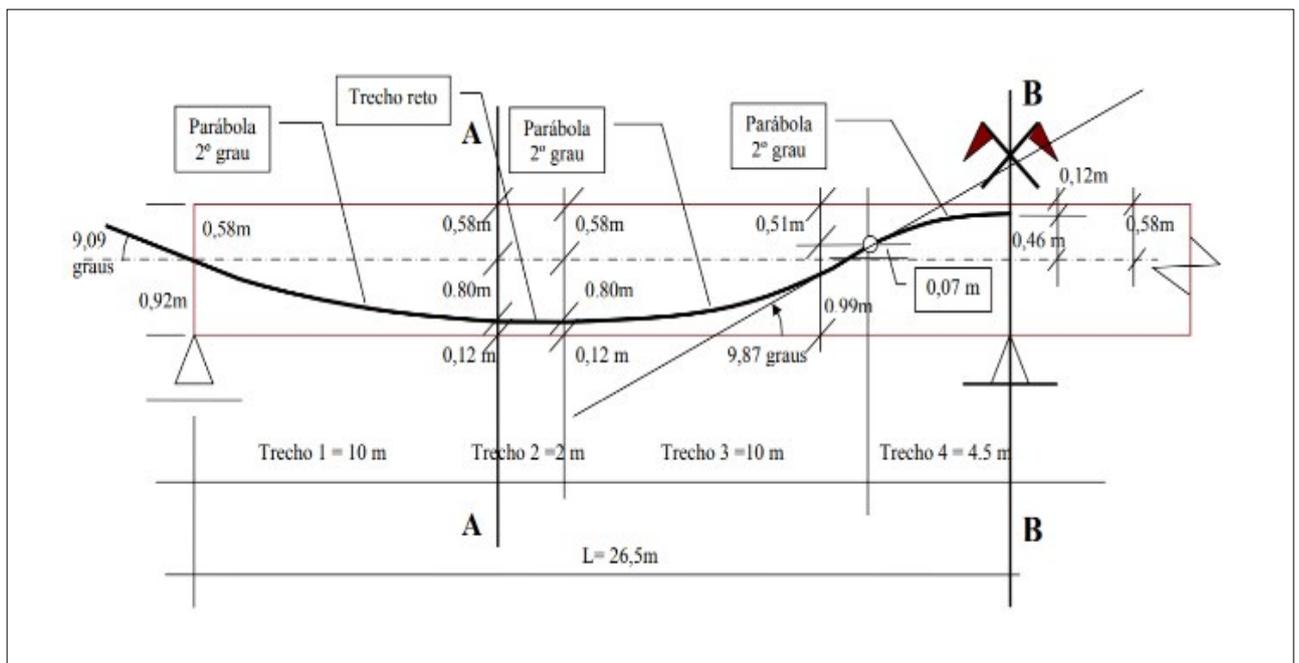
$$M_q = \frac{q \cdot l^2}{8} = \frac{40 \cdot 26,50^2}{8} = 3.511,25 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Figura 5 ▼

Traçado do cabo equivalente para um vão livre da viga simétrica.
 Fonte: adaptado de Kuchler (1993)

3.2 Determinação do hiperestático de protensão

Para determinação do hiperestático de protensão, é necessária a consideração inicial de um cabo equivalente com traçado determinado. Na Figura 5 é apresentado o modelo proposto por Kuchler (1993). As equações para o dimensionamento foram retiradas de Chaves, Carvalho e Sartorti (2018) e de Thomaz (2009).



Ressalta-se que, no estudo realizado por Kuchler (1993), houve a adoção inicial de 6 cabos com 12 cordoalhas de 12,7 mm cada, baseando-se apenas na experiência profissional. Ainda, considerou-se uma força de protensão equivalente a 8.000 kN constante ao longo da vida útil, ou seja, não foram consideradas as perdas de protensão.

De modo a exemplificar o cálculo do hiperestático de protensão pelo método das cargas equivalentes e, assim, determinar a armadura de protensão necessária, o presente estudo considerou inicialmente apenas a existência de um cabo equivalente – também composto por 12 cordoalhas de 12,7 mm. Ainda, foram consideradas as perdas de protensão imediatas e ao longo do tempo para o cabo equivalente, obtendo-se assim uma carga média de protensão (P) mais próxima da situação real para o cálculo das cargas equivalentes (q).

Assim sendo, apenas após o cálculo do hiperestático de protensão realizou-se a combinação de ações para determinação do momento de cálculo (M_d) atuante no elemento e, por fim, obteve-se a armadura de protensão necessária.

3.2.1 Perdas imediatas do cabo equivalente

A adoção do cabo equivalente resulta na fixação de algumas propriedades geométricas e parâmetros relativos. Para um cabo de representação 12 ϕ 1/2” (cabo com 12 cordoalhas, sendo que cada cordoalha possui diâmetro nominal de 1/2”), a área (A) é de 12,02 cm² e o diâmetro interno ($\phi_{\text{bainha interno}}$) é de 7 cm. O desvio angular (β) adotado equivale a 0,001 (embora a norma permita valores até 0,002).

O coeficiente de atrito (μ) é dado pela ABNT NBR 6118:2014 (ABNT, 2014). Dessa forma, considerando a superfície de atrito entre cordoalhas e bainha metálica, tem-se μ de 0,20.

De modo análogo a Kuchler (1993), adotou-se aço CP190RB, com valor de módulo de elasticidade (E_p) equivalente a 195.000 Mpa. Quanto à tensão inicial a ser aplicada na extremidade do cabo de protensão (σ_{pi}), deve-se adotar o menor dos valores resultantes da Equação a seguir, em que f_{ptk} é a resistência à tração, relacionada à carga de ruptura mínima, e f_{pyk} a resistência ao escoamento, relacionada à carga mínima a 1% de alongamento. A carga de ruptura mínima e a carga mínima a 1% de alongamento valem 187,30 kN e 168,60 kN, respectivamente (CARVALHO, 2017).

$$\sigma_{pi} \leq \begin{cases} 0,74 f_{ptk} = 0,74 \times [(187,3 \times 1.000)/98,7] \\ 0,82 f_{pyk} = 0,82 \times [(168,6 \times 1.000)/98,7] \end{cases}$$

$$\therefore \sigma_{pi} \leq \begin{cases} 1.404 \text{ MPa} \\ 1.400 \text{ MPa} \end{cases} \rightarrow \sigma_{pi} = 1.400 \text{ MPa}$$

Quanto ao sistema de protensão, padronizou-se Rudloff ou MAC, que, conforme um fabricante (PROTENDE, 2017), apresentam uma perda durante a cravação (ΔL) equivalente a 6 mm. Ainda, segundo a normativa brasileira ABNT NBR 6118:2014 (ABNT, 2014), para classe de agressividade ambiental III deve-se atender o nível de protensão limitada, com f_{ck} de 35 Mpa, relação água cimento (a/c) de no máximo 0,5 e cobrimento mínimo de 4,5 cm.

Determinados os parâmetros, calculam-se as perdas imediatas do cabo representante. No presente estudo, obtiveram-se as perdas por atrito e por deformação da ancoragem. As

perdas por deformação imediata do concreto foram desprezadas pelo desconhecimento do número de cabos.

Para a determinação da tensão no cabo representante, levam-se em consideração os trechos: S_0 (extremidade), S_1 (A), S_2 , S_3 e S_4 (B), considerando o vão entre apoios da viga simétrica (Figura 5). A tensão no cabo representante após as perdas imediatas por atrito (σ_s) é obtida através da Equação 6.

$$\sigma_s = \sigma_{pi} \cdot e^{-\mu \cdot (\sum \alpha + \beta \cdot \Delta x)} \quad (6)$$

na qual: $\sum \alpha$ é a somatória dos ângulos obtidos pela trajetória do cabo (Figura 5) e Δx é a distância no trecho analisado.

A tensão no cabo representante após as perdas imediatas por atrito é calculada por trecho, e os valores obtidos são apresentados na Tabela 2.

Tabela 2 ►
Cálculo das perdas imediatas por atrito do cabo representante por trecho.
Fonte: dados da pesquisa

	S_0	S_1 (A)	S_2	S_3	S_4 (B)
x (m)	0,00	10,00	2,00	10,00	4,50
Δx (m)	0,00	10,00	12,00	22,00	26,50
α (°)	0,00	9,09	0,00	9,87	9,87
$\sum \alpha$ (rad)	0,00	0,16	0,16	0,33	0,50
μ	0,20	0,20	0,20	0,20	0,20
β (rad/m)	0,01	0,01	0,01	0,01	0,01
σ_s (Mpa)	1.400	1.329,42	1.324,11	1.253,94	1.200,62

Obtidos os valores das tensões representantes após as perdas imediatas por atrito, é necessária a consideração da deformação das ancoragens. Por meio de tentativas, estima-se o valor da trajetória correspondente ao “ponto” em que a perda de tensão por deformação da ancoragem não tenha influência.

- Tentativa 1: perda por deformação da ancoragem influencia até o ponto 2. A área a ser obtida é dada por:

$$A_{p2} = \frac{((1400 - 1324,11) + (1329,42 - 1324,11))}{2} \times 2 \times 10 \times 100 + \frac{(1329,42 - 1324,11)}{2} \times 2 \times 2 \times 100$$

$$\therefore A_{p2} = 82.256,33 \text{ mm}^2$$

$$\Delta L \cdot E_p = 0,6 \times 195000 = 117000 \text{ mm}^2$$

$$\therefore A_{p2} < \Delta L \times E_p$$

em que E_p é o módulo de elasticidade da cordoalha de protensão.

Isso significa que o ponto “indeslocável” à ancoragem está à direita do ponto 2 ($L = 12$ m).

- Tentativa 2: a perda por deformação da ancoragem influencia até o ponto 3. A área a ser obtida é dada por:

$$A_{p3} = \frac{((1400 - 1253,94) + (1329,42 - 1253,94))}{2} \times 2 \cdot 10 \cdot 100 + \frac{((1329,42 - 1253,94) + (1324,11 - 1253,94))}{2} \times 2 \times 2 \times 100 + \frac{(1324,11 - 1253,94)}{2} \times 2 \times 10 \times 100$$

$$\therefore A_{p3} = 320.846,90 \text{ mm}^2$$

$$\therefore A_{p3} > \Delta L \times E_p$$

Isso significa que o ponto “indeslocável” à ancoragem está à esquerda do ponto 3 ($L = 22$ m).

Desse modo, o ponto “indeslocável” pode ser obtido por meio de relações geométricas, resultando nos seguintes cálculos.

$$\frac{\Delta\sigma}{2 \times (1324,11 - 1253,94)} = \frac{L_0}{100} \rightarrow L_0 = 7,126 \cdot \Delta\sigma$$

em que $\Delta\sigma$ é a variação de tensão em referência ao ponto 2, e L_0 é a distância (somada à do ponto 2) do ponto indeslocável.

$$A_{p3} = 82.256,33 + \Delta\sigma \times 500 + \Delta\sigma \times \left(\frac{L_0}{2}\right) = 117000 \text{ mm}^2$$

Por substituição, obtêm-se os valores de $\Delta\sigma$ e L_0 .

$$\Delta\sigma = 50,97 \text{ MPa}$$

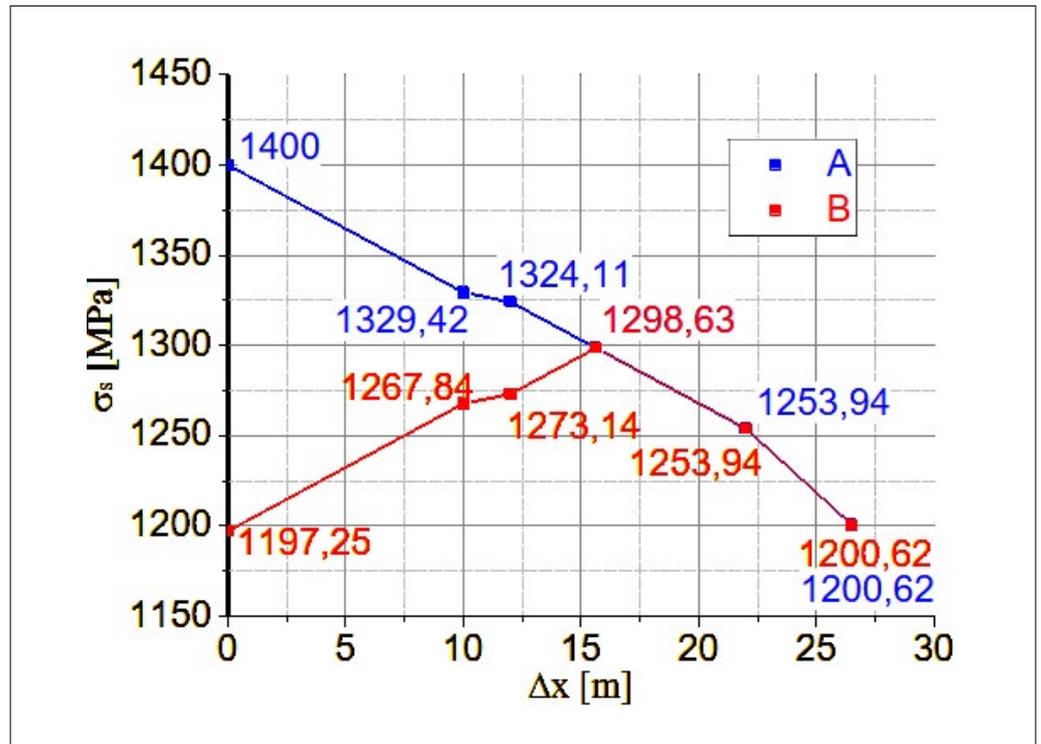
$$L_0 = 363,23 \text{ cm}$$

Portanto, o ponto indeslocável está a 363,23 cm do ponto 2, ou seja, a 1.563,23 cm do ponto 0. A tensão no ponto equivale a 1.298,63 Mpa.

Na Figura 6 é apresentado o gráfico referente à tensão de protensão no cabo representante após as perdas imediatas por atrito e por deformação final das ancoragens, por trecho.

Figura 6 ▶

Tensão no cabo representante ao longo do traçado após as perdas imediatas por atrito.
 Fonte: dados da pesquisa



Legenda: A: tensão após as perdas de protensão por atrito (Mpa); B: tensão após as perdas de protensão por atrito e deformação das ancoragens (Mpa)

3.2.2 Perdas ao longo do tempo do cabo representante

Além das considerações relativas às perdas de protensão imediatas, deve-se ainda considerar as perdas devidas aos fenômenos reológicos a que estão sujeitos o aço e o concreto. Portanto, as características mecânicas e elásticas destes variam ao longo do tempo quando solicitados. Os principais fenômenos reológicos considerados para efeitos de cálculo são a retração e a fluência do concreto e a relaxação da armadura de protensão.

3.2.2.1 Perdas devidas à retração

A perda por retração é dada pela Equação 7.

$$\Delta\sigma_{p,s} = E_p \cdot \varepsilon_s(\infty,5) \quad (7)$$

Para o cálculo das perdas devidas à retração são impostas as seguintes condições: umidade ambiental equivalente a 75%; protensão efetuada aos cinco dias de idade do concreto; e temperatura média ambiente de 20 °C. A espessura equivalente (*e*) necessária para o cálculo é dada pela Equação 8.

$$e = \frac{2 \cdot A}{\mu} \quad (8)$$

na qual A é a área da seção transversal e μ , o perímetro da seção em contato com o ar. Nesse exemplo, tem-se área de 2,248 m². O valor de μ é obtido com base nos dados mostrados anteriormente, e assim é determinada a espessura equivalente:

$$\mu = 1,25 + 2,50 + 1,25 = 5,00 \text{ m}$$

Tabela 3 ▼

Valores de deformação de retração (ε_s) e do coeficiente de fluência (φ).

Fonte: adaptado de ABNT (2014)

$$\therefore e = \frac{2 \cdot 2,248}{5} = 0,899 \text{ m}$$

De posse de tais dados e por meio da Tabela 3 é possível determinar a deformação de retração (ε_s) e o coeficiente de fluência (φ). Ressalta-se que, para efeitos de cálculo, foi adotado o valor correspondente ao limite superior.

Umidade ambiente (%)		40		55		75		90	
Espessura equivalente 2Ac/u (cm)		20	60	20	60	20	60	20	60
$\varphi(t_\infty, t_0)$	5 dias (t_0)	4,40	3,90	3,80	3,30	3,00	2,60	2,30	2,10
	30 dias (t_0)	3,00	2,90	2,60	2,50	2,00	2,00	1,60	1,60
	60 dias (t_0)	3,00	2,60	2,20	2,20	1,70	1,80	1,40	1,40
$E_{cs}(t_\infty, t_0)$	5 dias (t_0)	-0,44	-0,39	-0,37	-0,33	-0,23	-0,21	-0,10	-0,09
	30 dias (t_0)	-0,37	-0,38	-0,31	-0,31	-0,20	-0,20	-0,09	-0,09
	60 dias (t_0)	-0,32	-0,36	-0,30	-0,30	-0,17	-0,19	-0,08	-0,09

Dessa forma:

$$\varphi_{(\infty,5)} = 2,60$$

$$\varepsilon_{s(\infty,5)} = 2,10 \times 10^{-4} \%$$

Sendo assim, a perda por retração é:

$$\Delta\sigma_{p,s} = 195.000 \times 2,10 \times 10^{-4} = 40,95 \text{ MPa}$$

3.2.2.2 Perdas devidas à fluência

A perda por fluência é dada pela Equação 9. O valor de $\sigma_{cg,g}$ corresponde à tensão que ocorre no concreto no nível do centro de gravidade da armadura de protensão.

$$\Delta\sigma_{p,c} = \frac{E_p}{E_c} \times \sigma_{cg,g} \times \varphi_{(\infty,5)} \quad (9)$$

na qual o módulo de elasticidade (E_c) é dado pela Equação 10:

$$E_c = \alpha_E \times 5.600 \times \sqrt{f_{ck}} \quad (10)$$

Adotando α_E equivalente a 1, por ser considerado granito conforme Kuchler (1993), tem-se:

$$E_c = 1 \times 5600 \times \sqrt{35} = 33.130,05 \text{ MPa}$$

Devido ao desconhecimento do número de cabos, adota-se um valor de 5 Mpa, determinando assim a perda por fluência.

$$\Delta\sigma_{p,c} = \frac{195.000}{33.130,05} \times 5 \times 2,60 = 76,52 \text{ MPa}$$

3.2.2.3 Perdas devidas à relaxação do aço

A perda por relaxação do aço é dada pela Equação 11.

$$\Delta\sigma_{p,r} = \sigma_p \times \psi_{(\infty, t_0)} \quad (11)$$

Para o cálculo dessa perda, é necessário conhecer o nível de tensão nesta, dado pelo Equação 12.

$$r = \frac{\sigma_p}{f_{ptk}} \quad (12)$$

na qual σ_p é a tensão na armadura após as perdas imediatas (situação crítica) e f_{ptk} é a resistência à tração, relacionada à carga de ruptura mínima.

Sendo assim, o nível de tensão é:

$$r = \frac{1200,62}{1900} = 0,632$$

A relaxação de fios e cordoalhas, após 1.000 horas a 20 °C (Ψ_{1000}), para tensões variando de 0,5 *fptk* a 0,8 *fptk*, é determinada por meio dos valores encontrados na Tabela 4.

Tabela 4 ►
Valores de Ψ_{1000} , em %.
Fonte: adaptado de
Carvalho (2017)

Tensão inicial	Cordoalhas	
	RN	RB
0,5 <i>fptk</i>	0	0
0,60 <i>fptk</i>	3,50	1,30
0,70 <i>fptk</i>	7	2,50
0,80 <i>fptk</i>	12	3,50

Como o valor do nível de tensão obtido é intermediário, é necessário interpolar para determinar o valor de Ψ_{1000} , resultando em 1,372%.

Para o coeficiente de fluência no tempo infinito, tem-se a Equação 13.

$$\psi_{(\infty, t_0)} = 2,5 \times \psi_{1000} \quad (13)$$

$$\psi_{(\infty, t_0)} = 2,5 \times 1,372 = 3,43 \%$$

Por fim, a perda devida à relaxação da armadura é:

$$\Delta\sigma_{p,r} = 1.200,62 \times 0,0343 = 41,18 \text{ MPa}$$

3.2.2.4 Perdas totais

As perdas totais, ao longo do tempo, equivalem à soma das perdas por retração, fluência e relaxação da armadura.

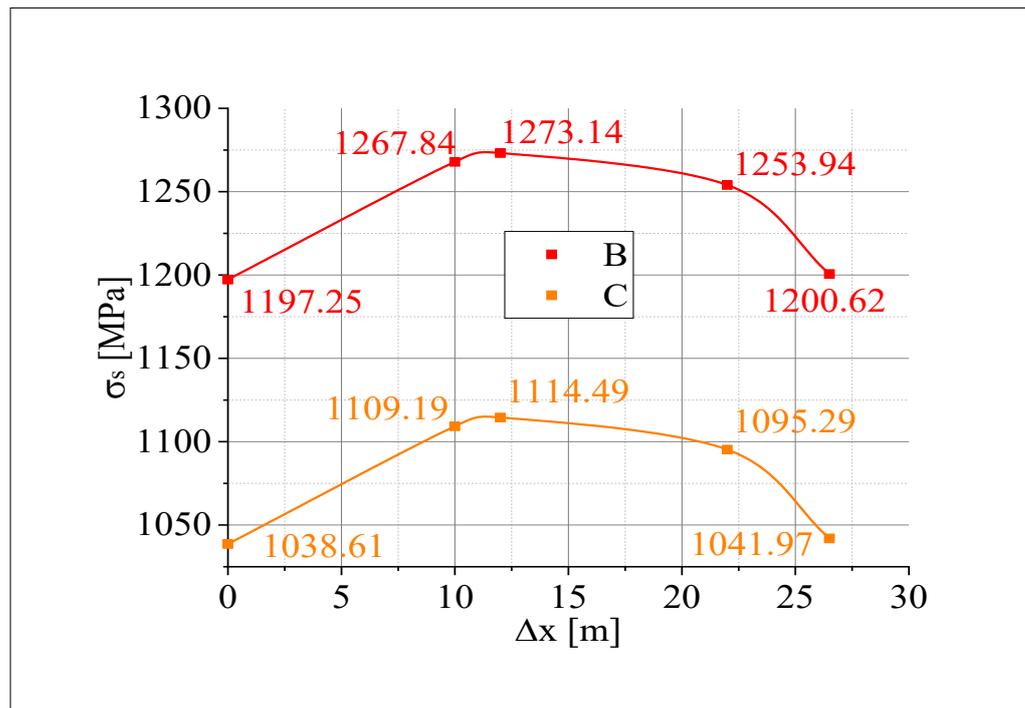
$$\sigma_{p,s+c+r} = 40,95 + 76,52 + 41,18 = 158,62 \text{ MPa}$$

Para efeitos de simplificação do cálculo, tais perdas serão consideradas para todos os trechos. Assim, constrói-se a Figura 7, descontando-se, por trecho, o valor das perdas de protensão ao longo do tempo dos valores apresentados na Figura 6.

Figura 7 ▶

Tensões de protensão após todas as perdas, por trecho.

Fonte: elaborada pelos autores



Legenda:

B: tensão após as perdas de protensão por atrito e deformação das ancoragens (Mpa); e

C: tensão ao longo do cabo representante após as perdas iniciais e ao longo do tempo (Mpa).

Assim, tem-se que, no ponto de análise (B) (26,50 m), a tensão de protensão no cabo representante no tempo infinito (após todas as perdas) equivale a 1.041,97 Mpa. Para obtenção da força de protensão no ponto de análise (B) no tempo infinito, multiplica-se a tensão obtida pela área do cabo equivalente, conforme apresenta a Equação 14.

$$P_{\infty(B)} = \sigma_{\infty(B)} \times A_{caboc} \quad (14)$$

$$P_{\infty(B)} = 104,20 \times 12,02 = 1.252,48 \text{ kN}$$

Portanto, o valor da força de protensão no tempo infinito no ponto B ($P_{\infty(B)}$) equivale a 1.252,48 kN. Esse será o valor considerado como força de protensão média (P) para o cálculo das cargas equivalentes.

3.2.3 Cálculo das cargas equivalentes e do momento de protensão

O cálculo das cargas equivalentes, pelo método convencional, foi realizado conforme exposto anteriormente, considerando a Equação 5. Para tanto, com base na Figura 5, foram considerados três trechos: trecho 1, do ponto 0 ao ponto 2; trecho 2, do ponto 2 ao ponto 3; e, trecho 3, do ponto 3 ao ponto 4. Assim, os comprimentos (L), as flechas (f) e a carga distribuída equivalente (q_1) foram obtidos.

- Trecho 1:

i) Comprimento:

$$\frac{L_1}{2} = 12 \rightarrow L_1 = 24 \text{ m}$$

ii) Flecha:

$$f_1 = 0,80 \text{ m}$$

iii) Carga distribuída equivalente:

$$q_1 = \frac{8 \cdot 1.252,48 \times 0,8}{24^2} = 13,92 \text{ kN/m}$$

- Trecho 2:

i) Comprimento:

$$\frac{L_2}{2} = 10 \rightarrow L_2 = 20 \text{ m}$$

ii) Flecha:

$$f_2 = 0,87 \text{ m}$$

iii) Carga distribuída equivalente:

$$q_2 = \frac{8 \times 1.252,48 \times 0,87}{20^2} = 21,80 \text{ kN/m}$$

- Trecho 3:

i) Comprimento:

$$\frac{L_3}{2} = 4,50 \rightarrow L_3 = 9 \text{ m}$$

ii) Flecha:

$$f_3 = 0,39 \text{ m}$$

iii) Carga distribuída equivalente:

$$q_3 = \frac{8 \times 1.252,48 \times 0,39}{9^2} = 48,42 \text{ kN/m}$$

Figura 8 ▼

Metade do esquema de carregamento lançado no software Ftool.
Fonte: elaborada pelos autores

Assim, com auxílio do *software* Ftool, é lançado o esquema da estrutura (Figura 8). Ressalta-se a consideração da direção de aplicação do carregamento uniformemente distribuído conforme a orientação da curvatura da parábola no trecho considerado. As cargas oriundas da força de protensão, projetadas nos eixos x e y e consideradas no lançamento da estrutura, são obtidas pelas Equações 1 e 2, respectivamente. Para tanto, conforme ilustrado na Figura 5, o ângulo α equivale a $9,09^\circ$. Desse modo, processa-se a estrutura e calcula-se o momento fletor total $M_{tor(x)}$. A Figura 9 ilustra o gráfico obtido.

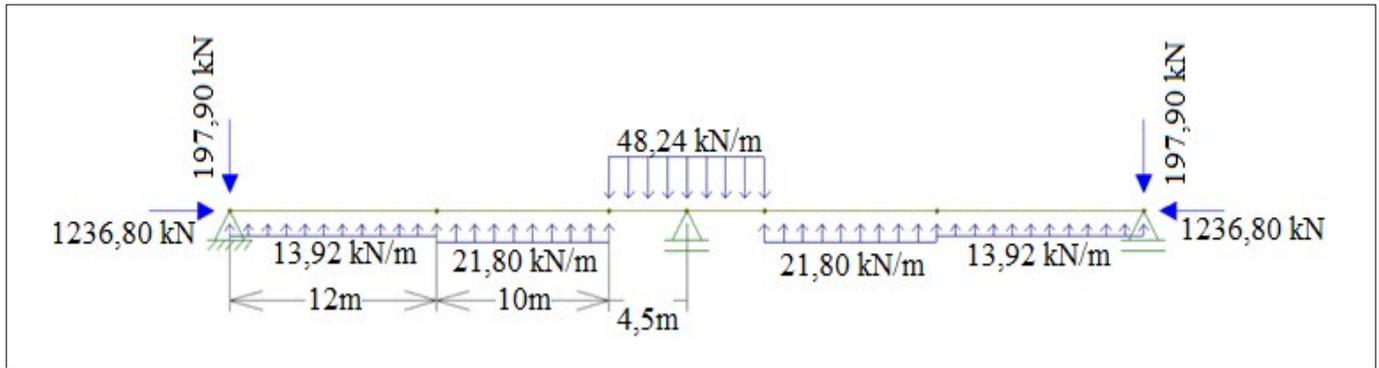
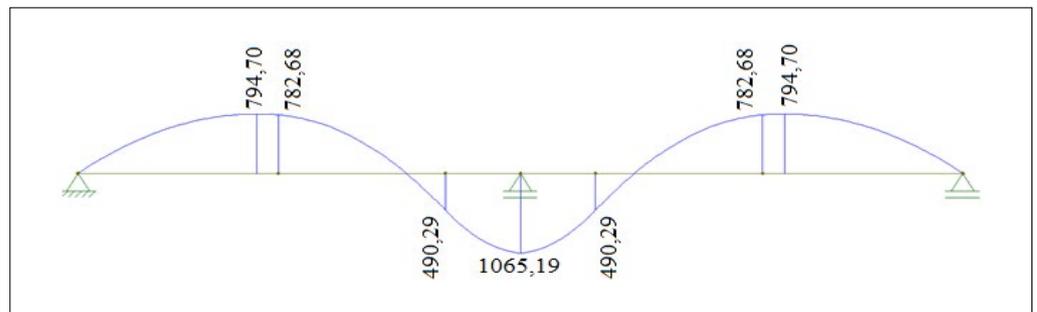


Figura 9 ►

Gráfico dos momentos fletores totais obtidos através do *software* Ftool.
Fonte: elaborada pelos autores



Como citado, a análise aqui realizada está relacionada ao meio do vão da viga contínua (ponto B), e, através da Figura 9, determina-se o momento fletor total no ponto B, equivalendo a 1.065,19 kN.m.

Assim, por meio das Equações 3 e 4, obtêm-se os valores do momento fletor isostático no ponto B e do momento fletor hiperestático no ponto B, respectivamente.

$$M_{iso(B)} = 1.252,48 \times 0,46 = 576,14 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{hiper(B)} = 1.065,19 - 576,14 = 489,05 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

3.3 Cálculo do número de cabos no estado limite último

O cálculo do número de cabos necessários, considerando o estado limite último, é realizado de modo similar ao dos elementos isostáticos para obtenção da área de protensão (A_p). Todavia, na combinação de ações, é necessário atentar-se à inserção do momento de protensão junto a um coeficiente de majoração.

Para o caso em questão, a Equação 15 apresenta a combinação de aços, com os respectivos coeficientes de majoração a serem empregados. Salienta-se que, conforme a Figura 2, o hiperestático de protensão acarreta o surgimento de esforços contrários às cargas permanentes e variáveis. Assim, o coeficiente de majoração empregado equivale a 0,9, pois reduz o alívio proporcionado pelo momento hiperestático no apoio B.

$$M_d = 1,3 \cdot M_g + 1,5 \cdot M_q + 0,9 \cdot M_{hiper} \quad (15)$$

Dessa forma, sabendo que o momento devido à carga permanente é de 5.811,12 kN.m, devido à carga acidental é de 3.511,25 kN.m e que o momento hiperestático é de -489,05 kN.m, conclui-se que o momento solicitante de cálculo equivale a 12.381,20 kN.m.

Determinado o momento fletor solicitante de cálculo, é possível, considerando o estado limite último, obter a armadura de protensão (A_p). Primeiramente, calcula-se a tensão de pré-alongamento (ϵ_p) através da Equação 16.

$$\epsilon_p = \frac{\sigma_{\infty(B)}}{E_p} \quad (16)$$

$$\epsilon_p = \frac{1.041,97}{195.000} = 0,53 \%$$

O valor da altura útil (d) adotada, obtida através da Figura 1, equivale a 1,38 metro. Assim, por meio da Equação 17, calcula-se KMD (parâmetro adimensional para determinar a área de aço).

$$KMD = \frac{M_d}{b \times d^2 \times f_{cd}} \quad (17)$$

$$KMD = \frac{12.381,20}{2,5 \times 1,38^2 \times \frac{35.000}{1,4}} = 0,104$$

Utilizando os valores da Tabela 5 para o KMD , determinam-se os demais parâmetros necessários para o cálculo da armadura de protensão, como KX (divisão entre a distância da face superior até a linha neutra pela altura útil), KZ (divisão entre o braço de alavanca dos esforços na seção pela altura útil) e as deformações no concreto (ϵ_c) e no aço (ϵ_s).

Tabela 5 ►

Valores para cálculo da armadura longitudinal de seções retangulares para concretos até 50 Mpa.

Fonte: adaptado de Carvalho (2017)

KMD	KX	KZ	ϵ_c	ϵ_s
0,1000	0,1569	0,9372	1,8611	10,000
0,1050	0,1654	0,9339	1,9810	10,000

Percebe-se que o valor de KMD obtido, de 0,104, não consta na Tabela 5. Desse modo, através do intervalo de KMD de 0,1000 a 0,1050, por interpolação, encontra-se KX igual a 0,1637.

Ainda, é necessário verificar a consideração da geometria da seção como retangular. Essa hipótese é confirmada, como apresentado na Equação 18, se:

$$h_f \geq 0,8 \times x \quad (18)$$

Pela Figura 1, tem-se que h_f equivale a 22 cm. Como KX representa a divisão da linha neutra pela altura útil (x/d), tem-se:

$$KX = \frac{x}{d} \rightarrow x = 1,38 \times 0,1637 = 0,226 \text{ m}$$

Dessa forma:

$$h_f = 0,22 \text{ m} \geq 0,8 \times 0,226 = 0,18 \text{ m}$$

Assim sendo, podem-se utilizar as formulações para seção retangular.

$$\frac{0,105 - 0,100}{0,9339 - 0,9372} = \frac{0,105 - 0,104}{0,9339 - KZ} \therefore KZ = 0,9346$$

Ainda, da Tabela 5, tem-se deformação no aço (ϵ_s) equivalente a 1%. O pré-alongamento é dado pela Equação 19.

$$\epsilon_{ptotal} = \epsilon_p + \epsilon_s \quad (19)$$

$$\epsilon_{ptotal} = 0,5 + 1 = 1,5\% = 15\%$$

Determinado o pré-alongamento, por meio da Tabela 6 obtém-se a tensão na armadura, sendo neste caso adotada a cordoalha CP190 RB.

Tabela 6 ►
Valores de tensão na armadura, em Mpa.
Fonte: adaptado de Carvalho (2017)

$\epsilon(\%)$	15,00
CP175	1388
CP190	1507

Desse modo, a tensão na armadura f_{pd} equivale a 1.507 Mpa. Então, a armadura de protensão (A_p) é calculada por meio da Equação 20.

$$A_p = \frac{M_d}{KZ \times d \times f_{pd}} \quad (20)$$

$$A_p = \frac{12.381,20}{0,9346 \times 1,38 \times 150,7} = 63,70 \text{ cm}^2$$

Determinada a área referente à armadura de protensão, por fim, tem-se o número de cabos necessários, dividindo-se a área calculada pela área do cabo, equivalente a 12,02 cm².

$$n^\circ \text{ cabos} = \frac{63,70}{12,02} = 5,30 \text{ cabos}$$

Portanto, adotam-se 6 cabos com 12 cordoalhas de 12,5 mm cada (CP190 RB), sendo esse o mesmo resultado obtido por Kuchler (1993). A altura útil (d) estabelecida pode ser determinada considerando um espaçamento entre barras equivalente ao dobro do diâmetro da bainha ($2\phi_{\text{bainha interna}}$) em x, e $1,5\phi_{\text{bainha interna}}$ em y. Têm-se os valores de 14 cm e 10,5 cm, respectivamente, resultando em (d) igual a 1,395 m. Por meio da Equação 17, calcula-se novamente KMD .

$$KMD = \frac{12.381,20}{2,5 \times 1,395^2 \times \frac{35.000}{1,4}} = 0,102$$

Para KMD equivalente a 0,102, observando os dados indicados na Tabela 5 e realizando interpolações, obtêm-se KX e KZ iguais a 0,1603 e 0,9359, respectivamente. Calcula-se, novamente, a armadura de protensão e a quantidade de cabos.

$$A_p = \frac{12.381,20}{0,9359 \times 1,395 \times 150,7} = 62,93 \text{ cm}^2$$

$$n^\circ \text{ cabos} = \frac{62,93}{12,02} = 5,20 \text{ cabos}$$

Portanto, confirma-se o emprego de 6 cabos com 12 cordoalhas de 12,5 mm cada (CP190 RB). Ainda, calcula-se a quantidade de armadura passiva necessária, através da Equação 21.

$$F_t = \frac{M_d}{KZ \times d} = A_p \times f_{pd} + A_s \times f_{yd} \quad (21)$$

Para aço CA50, tem-se:

$$\frac{12.381,20}{0,9359 \times 1,395} = 6 \times 12,02 \times 150,7 + A_s \times \frac{50}{1,15}$$

$$\therefore A_s = 0,02 \text{ cm}^2$$

Portanto, não é necessário o emprego de armadura passiva.

4 Conclusão

Como citado, as considerações do presente estudo se relacionam ao hiperestático de protensão no apoio (ponto B da Figura 5). Comparada aos valores de força de protensão inicial e à força de protensão média adotada por Kuchler (1993), percebe-se que a consideração das perdas de protensão (imediatas e ao longo do tempo) para adoção da força de protensão no cabo equivalente é primordial. A consideração das perdas de protensão acarretou redução de 26% da força de protensão no cabo equivalente.

Ressalta-se que, para o ponto B, a hiperestaticidade do elemento acarretou o alívio dos esforços a serem considerados. O mesmo ocorre para o ponto A.

Ao final dos cálculos, tem-se que o número de cabos obtido é semelhante ao obtido por Kuchler (1993), baseado na experiência profissional. Portanto, há veracidade e segurança na metodologia de cálculo do hiperestático de protensão pelo método das cargas equivalentes. O projetista deve, todavia, atentar-se à consideração do hiperestático de protensão como parcela na combinação de ações, conforme apresentado. Caso contrário, o dimensionamento da armadura de protensão no estado limite último poderá conduzir a um número maior de cabos, implicando gastos adicionais.

Financiamento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Conflito de Interesse

Os autores declaram não haver conflito de interesses.

Referências

ABNT – ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

AL-FAKHER, U.; MANALO, A.; FERDOUS, W.; ARAVINTHAN, T.; ZHUGE, Y.; BAI, Y.; EDOO, A. Bending behaviour of precast concrete slab with externally flanged hollow FRP tubes. **Engineering Structures**, v. 241, 112433, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.112433>.

CARVALHO, R. C. **Estruturas em concreto protendido**: pré-tração, pós-tração, cálculo e detalhamento. 2. ed. São Paulo: Pini, 2017.

CHAVES, R. J. S.; CARVALHO, R. C.; SARTORTI, A. L. Momentos hiperstáticos de protensão em lajes lisas protendidas. *In*: CONGRESSO BRASILEIRO DE PONTES E ESTRUTURAS (CBPE), 10., 2018, Rio de Janeiro. **Anais [...]**. Rio de Janeiro: ABPE, 2018. Disponível em: <http://www.abpe.org.br/trabalhos2018/150.pdf>. Acesso em: 29 jun. 2023.

GUYON, Y. **Prestressed Concrete**. 1. ed. London: Contractors Record and Municipal Engineering, 1953.

KONG, J. A practical method for the calculation of secondary prestress moments. **HKIE Transactions**, v. 11, n. 4, p. 49-52, 2004. DOI: <https://doi.org/10.1080/1023697X.2004.10667981>.

KUCHLER, T. W. Consistent treatment of prestress in the concept of structural concrete. *In*: INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR BRIDGE AND STRUCTURAL ENGINEERING, 1993, New Delhi. **Proceedings [...]**. New Delhi: IABSE, 1993.

LI, Z.-X.; LIU, H.; SHI, Y.; DING, Y.; ZHAO, B. Experimental investigation on progressive collapse performance of prestressed precast concrete frames with dry joints. **Engineering Structures**, v. 246, 113071, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2021.113071>.

LIN, T. Y. Load-balancing method for design and analysis of prestressed concrete structures. **Journal Proceedings ICA**, v. 60, n. 6, p. 719-742, 1963. DOI: <https://doi.org/10.14359/7874>.

O'HEGARTY, R.; KINNANE, O.; GRIMES, M.; NEWELL, J.; CLIFFORD, M.; WEST, R. Development of thin precast concrete sandwich panels: Challenges and outcomes. **Construction and Building Materials**, v. 267, 120981, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2020.120981>.

PROTENDE. **Protende**: sistemas e métodos. 2017. Disponível em: <https://www.protende.com.br/>. Acesso em: 15 set. 2021.

SABA, C. B. **Aplicação de linhas de influência para determinação de momentos hiperestáticos de protensão**. 2018. Trabalho de Conclusão de Curso (Bacharelado em Engenharia Civil) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2018. Disponível em: <http://repositorio.poli.ufrj.br/monografias/monopoli10024553.pdf>. Acesso em: 20 nov. 2021.

SILVA, T. C.; SÁNCHEZ FILHO, E. S. Analysis of the effect of the secondary moment on curved beams of full cross section. **Revista IBRACON de Estruturas e Materiais**, v. 14, n. 2, e14207, 2021. DOI: <https://doi.org/10.1590/S1983-41952021000200007>.

THOMAZ, E. C. S. **Concreto protendido - momento hiperestático de protensão (Notas de aula)**. Rio de Janeiro: Instituto Militar de Engenharia, 2009. Disponível em: http://aquarius.ime.eb.br/~webde2/prof/ethomaz/pontes/momento_hiperestatico_protensao.pdf. Acesso em: 29 jun. 2023.