

SUBMETIDO 20/08/2021

APROVADO 24/10/2021

PUBLICADO ON-LINE 29/10/2021

PUBLICADO 30/06/2023

EDITOR ASSOCIADO

Rodiney Marcelo Braga dos Santos

DOI: <http://dx.doi.org/10.18265/1517-0306a2021id6295>

ARTIGO ORIGINAL

# Um modelo matemático para um problema de planejamento de produção em indústrias alimentícias

 Marco Antonio Medeiros <sup>[1]\*</sup>

 Willy Alves de Oliveira Soler <sup>[2]</sup>

 Adriane Angélica Farias Santos Lopes de Queiroz <sup>[3]</sup>

[1] [marco.medeiros@ufms.br](mailto:marco.medeiros@ufms.br)  
Faculdade de Engenharias, Arquitetura e Urbanismo e Geografia, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Brasil

[2] [willy.oliveira@ufms.br](mailto:willy.oliveira@ufms.br)  
Instituto de Matemática, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Brasil

[3] [adriane.queiroz@ufms.br](mailto:adriane.queiroz@ufms.br)  
Escola de Administração e Negócios, Universidade Federal de Mato Grosso do Sul (UFMS), Brasil

**RESUMO:** Neste artigo abordamos um problema de dimensionamento de lotes observado em algumas indústrias alimentícias brasileiras que processam carnes embaladas. Nesse ambiente industrial, diversas linhas de produção compartilham os mesmos recursos produtivos (trabalhadores, ferramentas e máquinas) e devido à escassez desses recursos, apenas um subconjunto das linhas pode operar em cada período. Além disso, as linhas são especializadas, de modo que para cada produto existe uma única linha capaz de produzi-lo. Desse modo, a escolha das linhas de produção que irão operar impacta diretamente no conjunto de itens que podem ser produzidos. Esses itens produzidos são perecíveis, podendo permanecer estocados por um período limitado de tempo. Portanto, o problema estudado consiste em determinar, em cada período produtivo, quais linhas de produção devem ser montadas e o quanto se produzir de cada produto em cada linha, garantindo o atendimento das demandas dos clientes, evitando que os produtos sejam deteriorados pelo prazo de validade e minimizando os custos de produção envolvidos. Primeiramente, propomos um modelo matemático de otimização combinatória para representação do problema estudado. Em seguida, através de uma reformulação, provamos que o problema pertence à classe NP-difícil. Por fim, apresentamos um estudo computacional no intuito de identificar eficiência de um *solver* de alto desempenho para obtenção de soluções (primais e duais) em tempo computacional aceitável.

**Palavras-chave:** dimensionamento de lotes; indústrias alimentícias; modelo de otimização; recursos escassos.

## *A mathematical model for a production planning problem in food industries*

**ABSTRACT:** In this article we address a lot sizing problem observed in some Brazilian food industries that process packaged meats. In this industrial environment, several production lines share the same productive resources (workers, tools and machines) and due to the scarcity of these resources only a subset of the lines can operate in

\*Autor para correspondência.

each period. Moreover, the lines are specialized, so that for each product there is only one line capable of producing it. Thus, the choice of production lines that will operate directly impacts the set of items that can be produced. These items are perishable and can remain in stock for a limited period of time. Therefore, the studied problem consists in determining, in each production period, which production lines should be assembled and how much of each product should be produced in each line with the aim of meeting the customer demands, avoiding those products be deteriorated by the expiration date and minimizing the incurred production costs. Firstly, we propose an optimization model to represent the problem. Secondly, through a reformulation, we state and prove that the addressed problem is NP-hard. Finally, we present a computational study in order to identify the efficiency of a high-performance solver to obtain feasible solutions and dual bounds at acceptable computational time.

.....  
**Keywords:** food industries; lot sizing problem; optimization models; scarce resources.  
 .....

## 1 Introdução

O Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL) consiste em determinar quais produtos devem ser produzidos em cada período de um horizonte finito de planejamento, bem como a quantidade a ser produzida de cada produto (tamanho dos lotes), com o objetivo de garantir o completo atendimento das demandas dos clientes (previamente conhecidas) e minimizar os custos incorridos no processo de produção, normalmente associados à manutenção de produtos em estoque e aos procedimentos de preparação para produção (GUIMARÃES; KLABJAN; ALMADA-LOBO, 2014). De acordo com Glock, Grosse e Ries (2014), o PDL foi introduzido na literatura por Ford Whitman Harris em 1913.

O aumento da complexidade dos processos e sistemas de produção tem tornado desafiador o gerenciamento do ambiente produtivo industrial (ALMEDER; ALMADA-LOBO, 2011). Em virtude disso, encontramos na literatura diversas pesquisas que abordam o PDL através da proposição de novos modelos matemáticos e/ou da extensão de modelos clássicos para representação de sistemas complexos de produção. Por exemplo, Costa *et al.* (2014) propuseram um modelo para considerar um PDL com produtos perecíveis que surge na produção de hortaliças, enquanto Soler, Poldi e Santos (2019) estenderam um modelo da literatura para abordar um PDL com flexibilidade de atendimento das demandas que ocorrem em indústrias produtoras de carnes.

Neste trabalho, abordamos uma extensão do PDL motivada por um sistema de produção adotado em algumas indústrias brasileiras produtoras de alimentos perecíveis. Neste ambiente industrial, existem diversas linhas de produção que compartilham recursos produtivos escassos, tais como máquinas, ferramentas e trabalhadores. Devido à escassez desses recursos e à inviabilidade de aquisição de novos recursos, conforme detalhadamente discutido por Soler, Santos e Akartunali (2021), apenas um subconjunto das linhas pode operar durante cada período produtivo. Desse modo, é necessário decidir, para cada período produtivo, quais linhas devem ser ativadas (ou montadas) para produção, respeitando-se as quantidades disponíveis de cada recurso necessário. Além disso, nesse tipo de indústria, as linhas de produção são especializadas, de modo que, para cada produto, normalmente existe uma única linha apta a produzi-lo. Dessa forma,

a escolha das linhas de produção que serão ativadas determina o conjunto de produtos que poderão ser produzidos em cada período.

Além disso, no ambiente produtivo considerado, quando ocorre troca do produto a ser produzido numa mesma linha de produção, é necessário realizar alguns procedimentos de limpeza e configuração das máquinas, acarretando o consumo de tempo (*setup time*) que também representa um determinado custo de preparação (*setup cost*).

O ambiente industrial considerado caracteriza-se ainda pela produção de produtos perecíveis e que necessita ser armazenado em ambientes com temperatura rigorosamente monitorada, o que eleva significativamente os custos de armazenamento. A característica de perecibilidade também exige o controle do tempo em que cada produto permanece armazenado em estoque, visando garantir que eles não sejam deteriorados pelo prazo de validade e evitando, portanto, o descarte desnecessário de alimentos. Por fim, supõe-se ainda que as demandas dos clientes possam ser atendidas com atrasos de alguns períodos, isto é, permite-se o chamado *backlogging*. Contudo, como os atrasos nos atendimentos das demandas são indesejáveis e podem resultar em perdas de clientes, os custos relacionados aos atrasos (*backlogging costs*) são elevados.

Em suma, o problema considerado consiste em determinar, para cada período produtivo: a) quais linhas de produção serão ativadas (montadas); b) quais produtos produzir em cada linha ativada; e c) a quantidade a ser produzida de cada produto; com o objetivo de garantir o completo atendimento das demandas dos clientes (mesmo com eventuais atrasos), evitando que os produtos sejam deteriorados pelo prazo de validade e minimizando os custos totais envolvidos no processo produtivo, isto é, a soma dos custos de armazenamento, atrasos no atendimento das demandas, preparação para produção e montagem das linhas.

No restante do artigo, na Seção 2 apresenta-se uma breve revisão da literatura enfatizando a modelagem matemática de problemas correlatos. Na Seção 3 encontra-se a descrição da metodologia utilizada. Na Seção 4 apresenta-se um modelo de otimização combinatória para representação do problema e uma prova matemática para o fato de que o problema pertence à classe NP-difícil. A Seção 5 é dedicada à apresentação dos resultados computacionais que foram conduzidos utilizando 100 instâncias de testes geradas com base em cenários reais e capazes de representar indústrias de pequeno, médio e grande porte. Por fim, as conclusões e possíveis direções para pesquisas futuras são discutidas na Seção 6.

## 2 Revisão da literatura

Na literatura, o problema de planejamento da produção em ambientes industriais envolvendo decisões sobre quanto e quando produzir é denominado Problema de Dimensionamento de Lotes (PDL). De acordo com Glock, Grosse e Ries (2014), Ford Whitman Harris foi o primeiro a abordar o PDL, em 1913, quando propôs um modelo matemático conhecido como *Economic Order Quantity* (EOQ). Esse problema considera um cenário em que um único produto deve ser produzido numa única linha de produção com capacidade ilimitada. Além disso, supõe-se que o horizonte de planejamento é infinito e as demandas associadas aos períodos são previamente conhecidas. O objetivo é minimizar a soma entre os custos de preparação para a produção e a manutenção de estoque. O EOQ possui uma importância histórica e teórica, porém representa um sistema produtivo bastante simplificado que, em geral, não pode ser diretamente aplicado para tratar problemas reais. Assim, ao

longo dos anos, novos modelos foram propostos visando considerar características efetivamente observadas em ambientes industriais.

Rogers (1958) propôs, como uma extensão do EOQ, o *Economic Lot Scheduling Problem* (ELSP), o qual considera que vários produtos devem ser produzidos numa mesma máquina, de modo que se deve decidir tanto o tamanho do lote para cada produto, como também quando cada lote deve ser produzido. O ELSP apresenta as seguintes características: mono estágio, capacitado, multi-itens e o horizonte de planejamento é infinito.

Wagner e Whitin (1958) propuseram um algoritmo de programação dinâmica para solução do EOQ. O algoritmo proposto é capaz determinar a solução ótima para o problema e possui complexidade  $O(T^2)$  em que  $T$  é o número de períodos considerados no horizonte de planejamento. A ideia principal do algoritmo reside na caracterização das soluções ótimas do problema. Mais especificamente, os autores mostraram que, na ausência de restrições de capacidade, só deverá haver produção (e consequentemente custos de preparação) quando o estoque for nulo.

Karmarkar e Schrage (1985) propuseram um modelo para o PDL denominado *Continuous Setup Lotsizing Problem* (CSLP). O CSLP supõe a existência de uma única máquina com restrição de capacidade que pode produzir vários tipos de produtos e um horizonte finito de planejamento subdividido em períodos produtivos, que normalmente correspondem a um dia ou um turno de um dia. Nesse modelo, um único tipo de produto pode ser produzido em cada período.

Eppen e Martin (1987) propuseram uma técnica de redefinição de variáveis para modelos de programação de inteiros mistos, com a qual uma transformação linear nas variáveis é usada para produzir uma formulação equivalente. Além disso, os autores mostraram que a nova formulação pode ser facilmente implementada em programação linear de propósito geral.

Em Trigeiro, Thomas e McClain (1989), o PDL foi estudado considerando restrições de capacidade de produção da linha, tempos e custos de preparação, que podem variar entre os diferentes períodos, bem como a conservação do estado de preparação da linha de produção entre períodos adjacentes (*setup carryover*). Para tanto, foi proposto um modelo intitulado *Capacitated Lot Sizing Problem* (CLSP). Algoritmos baseados em relaxação Lagrangiana foram desenvolvidos e as restrições de capacidade foram dualizadas. Dessa forma, o modelo relaxado pôde ser decomposto em diversos subproblemas não capacitados e considerando um único produto. Assim, foi possível utilizar o eficiente algoritmo de Wagner e Whitin (1958) para a solução de cada subproblema. Por fim, um procedimento heurístico foi proposto para construir soluções factíveis a partir das soluções duais.

Fleischmann (1990) propôs o modelo *Discrete Lot sizing and Scheduling Problem* (DLSP), com o qual se considera que vários produtos devem ser produzidos numa única linha de produção. Além disso, supõe-se uma demanda dinâmica e determinística, conhecida a priori, que deve ser atendida sem atrasos. O objetivo é minimizar a soma dos custos de estoque e de preparação da produção. No DLSP, um horizonte finito de planejamento é decomposto em diversos períodos discretos que podem consistir em um dia, uma semana ou um mês a depender da aplicação considerada. Por fim, no DLSP adota-se a política do “tudo ou nada”, ou seja, para cada período de tempo, se a linha é preparada para produção de um determinado produto, então toda a sua capacidade produtiva é empregada para a produção da maior quantidade possível desse produto. Já em Fleischmann (1994) foi proposta uma reformulação do DLSP para considerar os custos de preparação dependentes da sequência. A reformulação foi baseada

na estrutura do problema do caixeiro viajante com janelas de tempo (TSPTW). Além disso, foram desenvolvidos procedimentos usando relaxação Lagrangiana e heurísticas para determinar limites inferiores.

O DLSP também foi adaptado por Drexel e Haase (1995) visando eliminar a restritiva suposição imposta pela política “tudo ou nada”. Desse modo, foi proposto o modelo *Proportional Lotsizing Problem* (PLSP), em que até dois diferentes tipos de produtos podem ser produzidos em cada período produtivo. O PLSP considera a preservação do estado de preparação da linha (*setup carryover*) e, em cada período  $t$ , o primeiro item a ser produzido deve ser o mesmo que estava sendo produzido ao final do período precedente ( $t - 1$ ).

Em Haase (1996), o PDL foi estudado considerando o limite de capacidade produtiva e custos de preparação para produção dependentes da sequência. Para tanto, foi proposto o modelo *Capacitated Lotsizing Problem with Sequence Dependent Setup Costs* (CLSD). O CLSD é uma importante generalização do modelo PLSP em que se permite a produção de diversos tipos de produtos num mesmo período. Além disso, considera-se o *setup carryover*, com o qual é possível determinar a sequência em que os itens são produzidos. O objetivo é minimizar a soma dos custos de preparação e de armazenamento do estoque.

Uma reformulação para o modelo CLSD, caracterizada pela inclusão de variáveis binárias para indicar se cada produto é ou não produzido em cada período, foi proposta por Oliveira e Santos (2017). Nesse trabalho, também foi considerado o tempo de preparação para produção. Os autores propuseram ainda uma nova regra de ramificação para acelerar a convergência de algoritmos do tipo *Branch-and-Bound* quando empregados na solução do CLSD. Resultados computacionais, realizados num conjunto de 240 instâncias de teste, evidenciaram que a reformulação proposta é bastante promissora do ponto de vista computacional.

Fleischmann e Meyr (1997) também propuseram um modelo para o PDL considerando restrições de capacidade, tempos e custos de preparação. Mais especificamente, o modelo *General Lotsizing and Scheduling Problem* (GLSP) permite que vários tipos diferentes de produtos sejam produzidos num mesmo período e, assim como o CLSD, também é capaz de determinar a ordem em que os itens devem ser produzidos em cada período. Supõe-se um horizonte finito de planejamento e demandas determinísticas, conhecidas a priori, que devem ser completamente atendidas sem atrasos, isto é, não se permite o *backlogging*. Para encontrar soluções de boa qualidade, foram propostas três heurísticas baseadas em busca local.

Meyr (2000) estendeu o modelo GLSP para considerar os tempos de preparação dependentes da sequência, originando o modelo GLSPST. Além disso, em Meyr (2002), uma extensão do modelo GLSP, intitulada *General Lotsizing and Scheduling Problem for Parallel Production Line* (GLSPPL), foi proposta para considerar ambientes industriais que operam por meio de várias linhas paralelas de produção.

Uma importante revisão de trabalhos sobre PDL foi apresentada por Karimi, Ghomi e Wilson (2003). Os autores descrevem diversas variações do PDL e apresentam as principais abordagens de soluções, tanto heurísticas como exatas, que têm sido empregadas com sucesso para a solução do PDL.

Outra importante revisão dos trabalhos da literatura que abordaram o PDL foi apresentada por Guimarães, Klabjan e Almada-Lobo (2014). Mais especificamente, os autores enfatizam os diferentes modelos matemáticos propostos na literatura e apresentaram um completo estudo computacional, com o qual é possível identificar as técnicas de modelagem mais promissoras para representação do PDL.

Em James e Almada-Lobo (2011), o CLSD foi considerado em um ambiente com linhas paralelas. Além disso, foi proposto um procedimento heurístico de duas fases: uma fase de busca local e outra de modificação de vizinhança sendo esta segunda fase semelhante a *Variable Neighborhood Search* (VNS) que foi proposta por Mladenović e Hansen (1997). O procedimento proposto foi denominado *Iterative Neighborhood Search* (INS) e apresentou boas soluções tanto para o problema de única como de várias linhas de produção.

Em Almeder e Almada-Lobo (2011), os modelos CLSD e GLSP foram estendidos para considerar um PDL com várias linhas de produção que compartilham alguns recursos escassos, tais como máquinas e ferramentas. Esses problemas ocorrem em diversos processos de fabricação tais como: na indústria de semicondutores para testagem de *wafers*, na indústria de bebidas na produção e engarrafamento de refrigerantes. Os autores observaram que o CLSD foi capaz de obter melhores soluções factíveis em menor tempo computacional.

Soler, Poldi e Santos (2019) abordaram um PDL que ocorre em indústrias produtoras de carnes embaladas, com flexibilidade para aceitação das demandas dos clientes. Mais especificamente, as demandas dos clientes são realizadas em forma de pedidos indivisíveis que devem ser completamente aceitos e produzidos ou completamente rejeitados. Os pedidos aceitos devem ser entregues de uma única vez num período dentro de uma janela de tempo especificada pelo próprio cliente. Os autores estendem o modelo CLSD para considerar essas novas características e propuseram um procedimento heurístico de solução composto por três fases: construção, melhoria determinística e melhoria estocástica. Os resultados computacionais evidenciaram que a abordagem heurística proposta é capaz de oferecer melhores soluções do que o algoritmo *Branch-and-Bound* de um *solver* comercial de alto desempenho.

Soler, Santos e Akartunali (2021) abordaram um PDL que ocorre em indústrias brasileiras produtoras de carnes embaladas. No ambiente considerado, os produtos são perecíveis e, assim como em Almeder e Almada-Lobo (2011), diversas linhas de produção compartilham dos mesmos recursos escassos. Nesse trabalho, o CLSD foi adaptado para considerar as características de perecibilidade e compartilhamento de recursos escassos. Também foi proposta uma heurística construtiva do tipo *relax-and-fix* que se mostrou capaz de fornecer boas soluções factíveis em tempo computacional aceitável, mostrando-se mais promissor do que heurísticas da literatura e do que um algoritmo exato de um *solver* comercial de alto desempenho quando o tempo máximo de execução é inferior a três horas. Além disso, a heurística *relax-and-fix* obteve limitantes duais competitivos.

A perecibilidade é uma característica bastante importante do problema estudado neste trabalho. Ambientes produtivos com essa característica foram amplamente estudados na literatura. Por exemplo, Costa *et al.* (2014) trataram um problema de planejamento de produção de hortaliças. Para tanto, os autores propuseram um modelo para decidir a cultura que deve ser plantada em cada área disponível satisfazendo restrições que permitam o cultivo sustentável. Além disso, o modelo é capaz de controlar a idade (número de períodos) em que cada produto está em estoque, evitando que os itens sejam deteriorados pelo prazo de validade e que tenham seu valor de mercado significativamente reduzido.

Em Pires *et al.* (2015) foi desenvolvido um modelo para o planejamento da produção de diversos produtos alimentícios perecíveis abrangendo a data de validade, comportamento dos clientes e custos de descarte. Além disso, o modelo foi estendido para contabilizar o valor do frescor dos alimentos e a demanda dependente da idade.

Amorim *et al.* (2013b) elaboraram uma revisão de modelos que tratam de problemas de planejamento da produção e distribuição de produtos perecíveis e propuseram uma estrutura transversal e unificada para classificar a perecibilidade. A estrutura foi dividida em três partes: a) tarefas de planejamento da produção; b) tarefas de planejamento da distribuição; e c) abordagens integradas.

Em Amorim *et al.* (2013a) foi considerado um problema operacional de produção e distribuição em que um conjunto de linhas paralelas com capacidade limitada produz um conjunto de produtos perecíveis que serão entregues a um conjunto de clientes. Foram apresentados dois modelos: a) considera apenas os lotes e b) é uma extensão do primeiro para considerar o dimensionamento de lotes. Os resultados mostraram que o dimensionamento de lotes é capaz de diminuir os custos de produção e distribuição gerando uma economia na ordem de 6,5%.

Para incorporar a perecibilidade em sua formulação, foi elaborada, por Wei *et al.* (2019), uma extensão do problema clássico GLSP multinível (MLGLSP), onde consideram que a perecibilidade surge desde o processo de aquisição de matéria-prima, produção e gerenciamento do estoque. No processo de produção multinível os componentes são divididos entre matéria-prima, intermediários e produtos finais, cada qual com tempo de validade diferente. O objetivo é controlar a vida útil restante dos materiais e manter um nível de estoque positivo para cada etapa da produção ao longo do horizonte de planejamento assegurando a qualidade dos produtos finais.

Neste trabalho, um problema de dimensionamento de lotes que abrange recursos escassos e perecibilidade integrados é abordado. No restante deste artigo, o problema abordado será designado de Problema de Dimensionamento de Lotes considerando Produtos Perecíveis e Linhas de Produção que Compartilham Recursos Escassos – PDL-PPRE.

Além da importância para diversas indústrias, o PDL-PPRE pode ser visto como um caso particular do problema proposto por Soler, Santos e Akartunali (2021). Dessa forma, o desenvolvimento de abordagens eficientes para lidar com o PDL-PPRE poderão beneficiar os métodos de solução propostos por Soler, Santos e Akartunali (2021).

Além disso, um modelo de otimização inteira mista do PDL-PPRE é proposto e o desempenho computacional é estudado quando ele é solucionado por um *solver* comercial de alto desempenho. O modelo desenvolvido foi adaptado dos modelos propostos em Haase (1996) e Soler, Santos e Akartunali (2021), utilizando-se a redefinição de variáveis proposta por Eppen e Martin (1987) para a modelagem da perecibilidade.

### 3 Metodologia

A fim de representar o problema considerado neste trabalho, um modelo de otimização linear inteira mista foi proposto. O modelo é composto por: i) uma função objetivo que representa os custos de produção e que, portanto, necessita ser minimizada; e ii) restrições que representam as características específicas do problema, conforme será detalhado na Seção 4. Além disso, são utilizadas variáveis binárias para representar decisões sobre quais linhas devem ser ativadas em cada período e quais produtos produzir em cada linha ativada. Variáveis contínuas são utilizadas para representar a quantidade que deverá ser produzida de cada produto em cada período e linha de produção.

Arquivos de dados, denominados instâncias, são utilizados contendo os valores dos parâmetros para definir um exemplo particular do problema. Com o objetivo de realizar um estudo sobre o desempenho computacional e a efetividade do modelo proposto, realizamos testes com um conjunto de 100 instâncias da literatura. Essas instâncias estão divididas em cinco grupos que denominamos classes. As classes representam empresas de pequeno, médio e grande porte. As características das instâncias são apresentadas na Tabela 1.

**Tabela 1** ►  
Características das cinco classes das instâncias de teste.  
*Fonte: adaptado de Soler, Santos e Akartunali (2021)*

Classe	T	L	J	K	$\varphi^d$	$\varphi_k^r$	$\varphi_0^r$	$\Phi^b$	$\Phi^e$	$\gamma$
1	10	7	45	5	100	0,8	0,6	0	0	6
2	10	10	80	6	100	0,8	0,6	0	0	8
3	14	10	90	6	90	0,6	0,5	0	0	8
4	12	10	110	7	90	0,6	0,55	100	150	8
5	14	10	110	7	90	0,6	0,55	50	150	8

Legenda:  $T$  – número de períodos;  $L$  – número de linhas de produção;  $J$  – número de produtos;  $K$  – número de recursos;  $\varphi^d$  – parâmetro utilizado na geração das demandas, conforme explicitado na seção 5.1;  $\varphi_k^r$  e  $\varphi_0^r$  – percentual em relação à quantidade total de recursos do tipo  $k$  necessário para a montagem simultânea de todas as linhas de produção, quando  $k = 0$  representa os trabalhadores;  $\Phi^b$  e  $\Phi^e$  representam os custos unitários mínimos e máximos, respectivamente, de cada tipo de recurso produtivo considerado;  $\gamma$  – número máximo de produtos que podem ser produzidos em cada linha por período produtivo.

Além disso, o modelo matemático proposto foi implementado em linguagem C++ com auxílio da ferramenta *Concert Technology* do *solver* IBM ILOG Cplex 20.1. Esse *solver* dispõe de um algoritmo, denominado *Branch-and-Bound*, que pode ser utilizado na solução de qualquer problema de otimização linear inteira mista. Foram executados os testes em um nó de processamento do computador de alto desempenho (*cluster*) denominado Euler de propriedade do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI). A descrição completa do recurso computacional encontra-se na seção 5.1. Foram realizados experimentos computacionais limitando sucessivamente o tempo máximo de processamento de cada instância em 30 minutos, 1 hora e 2 horas.

## 4 Ambiente industrial, modelagem matemática e complexidade do PDL-PPRE

Primeiramente, na seção 4.1, é apresentado o ambiente industrial onde originou-se o problema abordado neste trabalho. Posteriormente, na seção 4.2, é desenvolvido um modelo matemático para representação do problema considerado. Por fim, apresenta-se um resultado teórico acerca da complexidade computacional do problema.

### 4.1 Ambiente industrial

Nesta seção, o ambiente industrial abordado é apresentado. O problema considerado neste trabalho pode ser observado em algumas indústrias alimentícias brasileiras

processadoras de carnes embaladas. Normalmente, a produção dessas indústrias destina-se tanto para o mercado local como também para exportação.

De acordo com a Portaria 5/1988 do Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento:

Carcaça é o bovino abatido, sangrado, esfolado, eviscerado, desprovido de cabeça, patas, rabada, glândula mamária (na fêmea), verga, exceto suas raízes, e testículos (no macho). Após a sua divisão em meias carcaças retiram-se ainda os rins, gorduras perirrenal e inguinal, “ferida-de-sangria”, medula espinhal, diafragma e seus pilares (BRASIL, 1988).

Durante o processamento da carcaça são retirados cortes específicos que podem ser entregues aos clientes *in natura* (apenas embalados e resfriados), congelados ou temperados. Além disso, pode haver uma linha de embutidos que inclui produtos como salames, mortadelas, hambúrgueres e produtos defumados.

As carcaças serão processadas em linhas de produção que deverão ser montadas no início do período (geralmente dia) em que serão designados os recursos (máquinas, ferramentas e trabalhadores) necessários para sua operacionalização. Esses recursos são finitos e a indústria não tem interesse ou condições de aumentá-los em função dos custos para a aquisição de novas máquinas, contratar novos trabalhadores ou expandir a fábrica, portanto não é possível abrir todas as linhas de produção simultaneamente. Além disso, um determinado produto é produzido por uma única linha de produção, ou seja, ao determinar as linhas que estarão abertas, haverá uma limitação de tipos de produtos que serão produzidos naquele período.

Em função de sua perecibilidade, os produtos deverão ser armazenados em ambiente com temperatura controlada. Ademais, caso o destino seja a exportação, haverá a necessidade de realizar um processo de congelamento mais rigoroso em temperaturas mais baixas para aumentar a vida útil do produto, entretanto com acréscimo dos custos de armazenamento. Para o mercado local, onde o consumo é mais rápido, geralmente é realizado apenas o resfriamento, mas neste caso a vida útil do produto pode diminuir sensivelmente.

O controle da vida útil dos produtos é muito importante, pois evita o desperdício de alimentos diminuindo a necessidade de abater mais animais, bem como expansão da área de pastagem ou de produção de ração.

O trabalho apresentado neste artigo engloba as seguintes características: linhas de produção paralelas, recursos escassos e produtos perecíveis. Para atender a demanda dos clientes há necessidade de determinar quais linhas de produção estarão abertas e, conseqüentemente, quais produtos serão produzidos no período, determinar o uso de recursos disponíveis para operação das linhas de produção e finalmente por produzir produtos perecíveis, há necessidade de controlar a sua vida útil para que cheguem aos clientes em condição de consumo, evitando o desperdício de matéria-prima.

## 4.2 Modelagem matemática

Esta subseção é dedicada à apresentação de um modelo matemático de otimização inteira mista com o objetivo de auxiliar os gestores nos processos de tomada de

decisões referentes ao planejamento da produção. Mais especificamente, as seguintes características foram consideradas:

- a) possui múltiplas linhas de produção que compartilham dos mesmos recursos escassos;
- b) a demanda é dinâmica e determinística;
- c) os produtos são perecíveis e não devem sofrer deterioração em estoque, ou seja, o prazo de validade deve ser controlado por produto;
- d) os procedimentos de preparação iniciados num dado período devem ser completamente concluídos nesse período.

Os parâmetros utilizados para a modelagem do problema abordado são apresentados.

$T$	Conjunto de períodos, indexados por $t$ e $p$ ;
$L$	Conjunto de linhas de produção, indexadas por $l$ ;
$J$	Conjunto de produtos, indexados por $j$ ;
$K$	Conjunto de recursos, indexados por $k$ . Usamos o índice $k = 0$ para representar os trabalhadores e o índice $k > 0$ para os demais recursos;
$P_l$	Conjunto de produtos que podem ser produzidos na linha $l$ ;
$d_{jt}$	Demanda do produto $j$ para o período $t$ ;
$C_l$	Capacidade produtiva (em tempo) da linha $l$ para o período $t$ ;
$a_{lj}$	Tempo de produção de uma unidade do produto $j$ na linha $l$ ;
$m_{lj}$	Quantidade mínima do produto $j$ que deve ser produzida quando a linha $l$ está configurada para produzi-lo;
$h_j$	Custo associado à manutenção de uma unidade do item $j$ em estoque;
$b_j$	Custo unitário referente ao atraso no atendimento da demanda do item $j$ ;
$sc_{lj}$	Custo de <i>setup</i> para produção do produto $j$ na linha $l$ ;
$st_{lj}$	Tempo de preparação para produção do produto $j$ na linha $l$ ;
$r_{kl}$	Quantidade do recurso $k$ necessário para montar a linha $l$ ;
$R_k$	Quantidade disponível do recurso $k$ no período $t$ ;
$sl_j$	Prazo de validade do produto $j$
$ac_l$	Custo de montagem da linha $l$ ;
$Y$	Número máximo de produtos que podem ser fabricados em cada linha e período.

Neste trabalho, a definição de variáveis de produção proposta por Eppen e Martin (1987) foi utilizada. Para tanto, se faz necessário definir um parâmetro auxiliar. Mais especificamente, seja  $hb_{jtp}$  o custo unitário associado à produção do item  $j$ , durante o período  $t$ , para atendimento da demanda referente ao período  $p$ . Observe que, quando  $p > t$ , o parâmetro  $hb_{jtp}$  deve representar o custo unitário de manter o item  $j$  em estoque do período  $t$  até o período  $p$ . Por outro lado,  $p < t$  indica que a produção da demanda ocorreu com atraso e, neste caso, o parâmetro  $hb_{jtp}$  deve representar o custo

unitário relacionado ao atraso de  $(t - p)$  períodos no atendimento de uma demanda pelo produto  $j$ . Portanto,

$$hb_{jtp} = \begin{cases} h_j(p-t), & \text{se } p \geq t \\ b_j(t-p), & \text{se } p < t \end{cases} \quad (1)$$

As variáveis de decisão necessárias e utilizadas:

$x_{ljtp}$  Quantidade de produtos do tipo  $j$  produzidos na linha  $l$  durante o período  $t$  para atender a demanda no período  $p$ ;

$w_{ljt}$  Igual a 1 se o produto  $j$  é produzido na linha  $l$  durante o período  $t$  e 0, caso contrário;

$\delta_{lt}$  Igual a 1 se a linha  $l$  está montada durante o período  $t$  e 0, caso contrário.

**A função objetivo:** o objetivo do modelo é minimizar os custos totais de produção. Os custos de produção são obtidos por meio da soma dos custos de manutenção de estoque e atraso nos atendimentos das demandas, dos custos de preparação para produção das linhas e dos custos de montagem das linhas de produção. Segue, assim, a função objetivo (2), cujos custos de manutenção de estoque e atraso foram calculados de acordo com a Equação 1.

$$\min \sum_{ljtp} hb_{ljtp} x_{ljtp} + \sum_{ljt} sc_{lj} w_{ljt} + \sum_{lt} ac_l \delta_{lt} \quad (2)$$

A seguir, na seção 4.3, são descritas detalhadamente as restrições que visam representar as características do problema abordado.

### 4.3 Restrições

**Atendimento das demandas:** no problema considerado, faz-se necessário assegurar que as demandas dos clientes sejam completamente atendidas até o final do horizonte de planejamento, podendo ocorrer atrasos, isto é, eventualmente, a produção dos produtos utilizados no atendimento da demanda de um período  $t$  pode ser completada num período posterior  $p$  (com  $p > t$ ). Além disso, como os produtos são perecíveis, é necessário garantir que os produtos utilizados para atendimento das demandas de cada período estejam dentro do prazo de validade ( $sl_j$ ). Para representar essas características, foram introduzidas as restrições (3). Essas restrições garantem que, para cada produto  $j$  e cada período  $t$ , a soma dos produtos produzidos durante o horizonte de planejamento é suficiente para o atendimento da demanda  $d_{jt}$ .

$$\sum_{p=\max\{1, t-sl_j\}}^T \sum_l x_{ljpt} = d_{jt}, \quad \forall j, t \quad (3)$$

**Capacidade das linhas de produção:** é preciso garantir que o tempo disponível para produção seja respeitado para todas as linhas e períodos. Observe que a capacidade

produtiva  $C_l$  é consumida tanto através da produção dos itens, como também através dos tempos destinados aos procedimentos de preparação para produção. Portanto, as restrições (4) foram introduzidas para garantir que, para toda linha e período, a soma entre os tempos consumidos com a produção e os tempos gastos com os procedimentos de preparação não devem exceder a capacidade disponível.

$$\sum_{j \in P_{l,p}} a_{lj} x_{ljtp} + \sum_j st_{lj} w_{ljt} \leq C_{lt}, \forall l, t \quad (4)$$

**A produção só pode ocorrer após a preparação da respectiva linha:** a fim de que ocorra a produção de um produto  $j$  numa linha  $l$  e período  $t$ , isto é,  $\sum_p x_{ljtp} > 0$ , é necessário que a respectiva linha esteja preparada ( $w_{ljt} = 1$ ). Desse modo, as restrições lógicas (5) foram introduzidas para assegurar que os itens não possam ser produzidos sem a realização do procedimento de preparação, ou seja, quando  $w_{ljt} = 0$ .

$$\sum_p x_{ljtp} \leq \frac{C_{lt}}{a_{lj}} w_{ljt}, \forall l, j \in P_l, t \quad (5)$$

**A produção só pode ocorrer em linhas ativadas:** em cada período produtivo, faz-se necessário garantir que apenas as linhas ativadas ( $\delta_{lt} = 1$ ) sejam utilizadas para produção. Desse modo, as restrições lógicas (6) foram inseridas para garantir que não haverá produção em linhas não ativadas. Nessas restrições, o parâmetro  $\gamma$  representa um limitante superior para o número máximo de diferentes tipos de produtos que podem ser produzidos em cada linha e período. No ambiente industrial considerado neste trabalho, é comum utilizar  $\gamma = 6$  ou  $\gamma = 8$ . Porém, observa-se que a introdução desse parâmetro não implica perda de generalidade para o modelo obtido. No caso geral, pode ser adotado  $\gamma = J$

$$\sum_{j \in P_l} w_{ljt} \leq \gamma \delta_{lt}, \forall l, t \quad (6)$$

**Capacidade dos recursos produtivos necessários para ativação das linhas:** as restrições (7) representam os limites de capacidade dos recursos (trabalhadores, máquinas e ferramentas) necessários para ativação das linhas de produção. Mais especificamente, para cada tipo de recurso  $k$  e período produtivo  $t$ , essas restrições garantem que a soma das quantidades efetivamente utilizadas do recurso  $k$  não excedem a quantidade disponível  $R_k$ .

$$\sum_l r_{kl} \delta_{lt} \leq R_k, \forall k, t \quad (7)$$

**Controle do prazo de validade:** a fim de evitar que itens fora do prazo de validade sejam mantidos em estoque ou que sejam utilizados para o atendimento das demandas, introduzem-se as restrições (8). Para cada produto  $j$ , essas restrições garantem que os produtos não sejam produzidos com antecedência maior do que  $sl_j$  períodos.

$$x_{ljtp} = 0, \forall l, j, p, t < \max\{1, p - sl_j\} \quad (8)$$

**Domínio das variáveis de decisão:** a seguir, restrições (9), (10) e (11) definem os domínios das variáveis de decisão.

$$x_{ljp} \geq 0, \forall l, j, t, p \quad (9)$$

$$w_{jt} \in \{0, 1\}, \forall l, j, t \quad (10)$$

$$\delta_{lt} \in \{0, 1\}, \forall l, t \quad (11)$$

Por fim, foi observado que o modelo apresentado neste trabalho pode conter até  $LJT^2$  variáveis contínuas,  $LJT + LT$  variáveis binárias e  $2LT + (L + 1)JT + KT$  restrições, excetuando-se as restrições que definem apenas os domínios das variáveis de decisão. Nesse caso, se consideradas as dimensões de indústrias de grande porte descritas em Soler, Santos e Akartunali (2021), caracterizadas, por exemplo, pela definição de parâmetros  $J = 150$ ,  $T = 15$ ,  $L = 8$  e  $K = 7$ , obtendo um problema com até 270.000 variáveis contínuas, 18.120 variáveis binárias e 20.595 restrições.

Finaliza-se esta seção com um resultado sobre a complexidade computacional requerida para solução do problema abordado. Chen e Thizy (1990) mostraram que o PDL com restrições de capacidade é NP-difícil. Além disso, o PDL-PPRE em seu caso mais simples, caracterizado pela existência de recursos suficientes para ativação simultânea de todas as linhas e cujos prazos de validade dos produtos excedem o tamanho do horizonte de planejamento ( $s_{lj} > T, \forall j$ ), pode ser decomposto em  $L$  PDLs tradicionais com restrições de capacidade. Portanto, segue que o PDL-PPRE é também NP-difícil, conforme afirmado na Proposição 1.

**Proposição 1:** O PDL-PPRE pertence à classe de problemas NP-difícil.

**Prova:** mostra-se que resolver qualquer instância  $\alpha$  do tradicional PDL, abordado em Chen e Thizy (1990), é equivalente a resolver uma instância  $\beta$  do PDL-PPRE, com a instância  $\beta$  obtida a partir da instância  $\alpha$  em tempo polinomial.

Nessa demonstração, uma reformulação do PDL-PPRE é adotada, caracterizada pela inclusão das restrições (12) no modelo apresentado. Nessas restrições, o parâmetro  $M_{jtp}$  representa qualquer limitante superior para a quantidade produzida do item  $j$  durante o período  $t$  para o atendimento da demanda referente ao período  $p$ . Naturalmente, uma possível definição de valores para esses parâmetros é  $M_{jtp} = d_{jp}, \forall j, t, p$ .

$$x_{ljp} \leq M_{jtp} w_{jt}, \forall l, j, t, p \quad (12)$$

As restrições (12) garantem que a produção só pode ocorrer em linhas previamente configuradas. Esse fato também é garantido pelas restrições (5), de modo que a inclusão das restrições (12) é opcional; porém válidas e úteis nesta demonstração.

Agora, tome uma instância  $\alpha$  para o PDL em que  $T$  representa o número de períodos,  $J$  representa o número de produtos,  $s_j$  denota o custo de preparação para produção do item  $j$ ,  $h$  denota o custo unitário de estoque do item  $j$ ,  $d_{jt}$  representa a demanda do item  $j$  durante o período  $t$ ,  $pr_j$  é o tempo requerido para produção de uma unidade do item  $j$  e, finalmente,  $Cap_t$  representa a capacidade de produção do período  $t$ . A fim de definir uma  $\beta$  para o PDL-PPRE a partir da instância  $\alpha$  descrita, consideram-se todos os parâmetros em comum ( $T, J, h_j$  e  $d_{jt}$ ) e definem-se os valores para os demais parâmetros necessários, de acordo com as notações estabelecidas na Seção 4.2, conforme segue:

- $L = 1$ , isto é, uma única linha de produção;
- $K = 1$ , ou seja, considera-se um único recurso produtivo;
- $P_l = P_l = J$ . Assim, todos os produtos considerados podem ser produzidos na única linha de produção disponível;
- $C_{lt} = C_{1t} = Cap_t, \forall t \in T$ . As capacidades produtivas consideradas na instância  $\beta$  são as mesmas consideradas na instância  $\alpha$ ;
- $a_{lj} = a_{1j} = pr_j, \forall j \in J$ . Consideram-se os mesmos tempos de processamento dos produtos;
- $m_{lj} = m_{1j} = 0, \forall j \in J$ . Não se considera lote mínimo de produção;
- $M_{jtp} = d_{jp}, \forall j \in J$  e  $\forall t, p \in T$  com  $p \geq t$  e  $M_{jtp} = 0, \forall j \in J$  e  $\forall t, p \in T$  com  $p < t$ . Com essa definição dos parâmetros  $M_{jtp}$ , as restrições (9) e (12) garantem que as demandas não poderão ser atendidas com atrasos, isto é,  $x_{ijtp} = 0$  sempre que  $p < t$ ;
- $b_j = 0, \forall j \in J$ . Não foram considerados os custos de atraso no atendimento das demandas;
- $sc_{lj} = sc_{1j} = s_j, \forall j \in J$ . Assim, os custos de preparação para produção considerados na instância  $\beta$  são os mesmos considerados na instância  $\alpha$ ;
- $st_{lj} = st_{1j} = 0, \forall j \in J$ , ou seja, não se considera tempo de preparação para produção;
- $r_{kl} = r_{11} = 0$ . Assim, a linha de produção não requer a designação de recursos produtivos para que possa operar;
- $R_k = R_1 = 0$ . Não se considera a existência de recursos produtivos;
- $sl_j = T + 1, \forall j \in J$ . Desse modo, todos os produtos podem permanecer em estoque durante todo o horizonte de planejamento;
- $ac_l = ac_1 = 0$ . Não existem custos para montagem da linha de produção;
- $\gamma = J$ . Portanto, todos os diferentes tipos de produtos podem ser produzidos num mesmo período produtivo.

Nessas condições, encontrar a solução ótima para a instância  $\alpha$  do PDL é equivalente a encontrar a solução ótima para a instância  $\beta$  do PDL-PPRE. Portanto, como o PDL

é NP-difícil (conforme provado em Chen e Thizy (1990)), segue que o PDL-PPRE também é NP-difícil.

## 5 Resultados computacionais

O objetivo desta seção é descrever os resultados obtidos em experimentos computacionais realizados com o modelo proposto neste trabalho. Primeiramente, na seção 5.1, apresentam-se as características (*software* e *hardware*) do recurso computacional utilizado, bem como das instâncias de teste consideradas. Por fim, na seção 5.2, discute-se os resultados obtidos.

### 5.1 Ambiente e instâncias de teste

O modelo PDL-PPRE foi implementado em linguagem C++ com auxílio da ferramenta *Concert Technology* do *solver* IBM ILOG Cplex 20.1. Os testes computacionais foram realizados em um nó de processamento do computador de alto desempenho (*cluster*) denominado Euler de propriedade do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria – CeMEAI, composto por computador com 2 processadores Xeon E5-2680v2 de 2.8 GHz, 10 *cores*, 2 *threads/core*, 25 MB SmartCache e 128 GB de memória RAM padrão DDR3 a 1866 MHz. A configuração padrão do *solver* Cplex foi utilizada e o tempo máximo de execução foi limitado em 1800 segundos.

Os testes computacionais foram realizados utilizando 100 instâncias de testes propostas em Soler, Santos e Akartunali (2021). Algumas adaptações foram necessárias, pois o PDL-PPRE considera a estrutura de preparação independente da sequência. As instâncias estão subdivididas em cinco classes com 20 instâncias cada. As classes foram definidas para representar as indústrias de diferentes portes. A seguir, apresentam-se as características principais das instâncias consideradas, observando ainda que uma descrição completa pode ser encontrada em Soler, Santos e Akartunali (2021).

Seguindo a notação estabelecida no início desta seção, as características principais das instâncias utilizadas (número de períodos, linhas, produtos e recursos) são apresentadas na Tabela 1. Os demais parâmetros foram gerados da seguinte forma:

- $d_{jt} \in U \left[ \frac{c_{lt} - \min_j \{st_{lj}\} \gamma - \varphi^d}{P_l} \right] \forall j, t$ , com  $\varphi^d$  especificado na Tabela 1;
- $C_{lt} = 480, \forall l, t$
- $a_{ij} = 1, \forall l, j$ ;
- $m_{lj} = 2, \forall l, j$ ;
- $st_{lj} \in U [15, 45], \forall l, j$ ;
- $sc_{lj} = 2 * st_{lj}, \forall l, j$ ;
- $r_{kl} \in U [0, 2], \forall k \neq 0, l$
- $r_{0l} \in U [5, 10], \forall l$ ;
- $R_k = \max \left\{ \max_{l=1, \dots, L} \{r_{k,l}\}, \varphi_k^r \sum_{l \in |L|} r_{k,l} \right\}, \forall k$ , onde  $\varphi_k^r$  é um parâmetro especificado na Tabela 1;

- $sl_j \in U[4, T], \forall j;$
- $h_j \in U[1, 10], \forall j$
- $b_j = 10 * h_j, \forall j$

## 5.2 Análise dos resultados computacionais

Com a finalidade de avaliar a qualidade das soluções obtidas pelo algoritmo *Branch-and-Bound* do *solver* IBM ILOG Cplex, o desvio percentual médio (GAP) foi calculado entre a melhor solução primal e o melhor limitante dual encontrados. Assim, para cada instância de teste utiliza-se a Equação 13 para a obtenção do GAP.

$$GAP = \frac{100 * (FO - DB)}{FO} \quad (13)$$

### Tabela 2 ▼

Desempenho computacional por classe – tempo máximo de execução de 30 minutos (1800 segundos).

Fonte: dados da pesquisa (2021)

Na Tabela 2, a coluna FO apresenta os valores médios das soluções factíveis encontradas, enquanto a coluna DB apresenta o valor médio obtido para os limitantes duais e a coluna NMN apresenta o número médio de nós explorados pelo algoritmo *Branch-and-Bound* do Cplex. A coluna NMI apresenta o número médio de iterações, enquanto a coluna TM apresenta o tempo médio de execução, em segundos. As colunas GAPmed, GAPmin e GAPmax apresentam os GAPs médios, menores e maiores obtidos em cada classe, respectivamente.

Classe	FO	DB	NMN	NMI	TM	GAPmed	GAPmin	GAPmax
1	55447	55444	2913	158832	5	0,01	0,00	0,01
2	72209	72202	26446	1355975	39	0,01	0,01	0,01
3	162998	144024	84362	27176332	1806	10,84	0,58	33,67
4	231221	202751	81476	27818285	1807	12,03	6,15	24,93
5	277862	244144	65356	20938643	1805	11,90	5,53	21,96

Legenda: FO – valor médio das soluções factíveis de cada classe; DB – valor médio dos limitantes duais de cada classe; NMN – número médio de nós explorados pelo algoritmo *Branch-and-Bound* do Cplex de cada classe; NMI – número médio de iterações de cada classe; TM – tempo médio de execução, em segundos; GAPmed, GAPmin e GAPmax – GAPs médio, mínimo e máximo obtidos em cada classe, respectivamente.

Por meio dos resultados reportados na Tabela 2, é possível perceber que o Cplex foi capaz de resolver todas as instâncias das classes 1 e 2 até a otimalidade. Para essas classes, os tempos médios de execução foram de 5s e 39s, respectivamente. Na Tabela 3 (página seguinte) as soluções obtidas pelo *solver* para as classes 1 e 2 são detalhadas. Na coluna Valor ótimo apresenta-se o valor médio das soluções encontradas, isto é, o custo médio de produção. A coluna TM apresenta o tempo médio de execução, em segundos. A coluna Custo estoque apresenta o valor médio do custo do estoque, a coluna Custo *setup* apresenta o custo médio de *setup* das linhas de produção, ou seja, o

custo médio de preparação para produção. A coluna Custo atraso apresenta o custo médio de atraso (*backlogging*) no atendimento das demandas dos clientes.

**Tabela 3 ▶**  
Detalhamento das classes 1 e 2.  
Fonte: dados da pesquisa (2021)

Classe	Valor ótimo	TM	Custo estoque	Custo setup	Custo atraso
1	55447	5	22099	10625	22723
2	72210	39	26813	20356	25041

Legenda: Valor ótimo – valor médio das soluções ótimas encontradas de cada classe; TM – tempo médio de execução de cada classe, em segundos; Custo estoque – valor médio do custo do estoque de cada classe; Custo *setup* – custo médio de setup das linhas de produção de cada classe, ou seja, o custo médio de preparação para produção; Custo atraso – custo médio de atraso (*backlogging*) de cada classe no atendimento das demandas dos clientes.

Entretanto para as instâncias pertencentes às classes 3, 4 e 5, percebeu-se que o Cplex não foi capaz de resolver nenhuma instância até a otimalidade com o tempo máximo de execução. Observou-se ainda, uma significativa variação entre os GAPs obtidos, principalmente na classe 3 na qual variaram de 0,58% (GAPmin) a 33,67% (GAPmax). Os resultados também indicam que algumas instâncias pertencentes à classe 3 são as mais desafiadoras do ponto de vista computacional.

Nas classes 4 e 5, foram observados GAPs médios de 12,03% e 11,90%, respectivamente, enquanto os GAPs mínimos observados foram 6,15% e 5,53%, respectivamente.

Esses resultados indicam que as instâncias com até 80 produtos e horizonte de planejamento de até 10 períodos (classes 1 e 2) podem ser efetivamente solucionadas pelo *solver* comercial em tempo computacional bastante aceitável. De acordo com Soler, Santos e Akartunali (2021), essas classes de instâncias representam indústrias de pequeno porte (classe 1) e médio porte (classe 2).

Diante da impossibilidade do *solver* encontrar soluções ótimas para as instâncias das classes 3, 4 e 5, nas Tabelas 4 e 5 são apresentados os resultados de experimentos computacionais em que o tempo máximo de execução foi fixado em duas horas. Nesse experimento, o *solver* foi capaz de encontrar soluções ótimas para cinco instâncias da classe 3 e para uma instância da classe 4. Contudo, mesmo com o tempo de execução ampliado, nenhuma instância da Classe 5 foi resolvida até a otimalidade.

**Tabela 4 ▼**  
Desempenho computacional por classe – tempo máximo de 2 horas (7200 segundos).  
Fonte: dados da pesquisa (2021)

Classe	FO	DB	NMN	NMI	TM	GAPmed	GAPmin	GAPmax
3	159448	154354	407754	92098472	6534	3,00	0,01	13,20
4	226461	219026	398800	103267081	7127	3,17	0,01	12,48
5	270624	256670	216582	85844992	7205	5,13	0,32	14,81

Legenda: FO – valor médio das soluções factíveis de cada classe; DB – valor médio dos limitantes duais de cada classe; NMN – número médio de nós explorados pelo algoritmo *Branch-and-Bound* do Cplex; NMI – número médio de iterações; TM – tempo médio de execução, em segundos; GAPmed, GAPmin e GAPmax – GAPs médios, mínimos e máximos obtidos em cada classe, respectivamente.

**Tabela 5** ▶

Detalhamento das classes 3, 4 e 5 – tempo máximo de execução de 2 horas (7200 segundos).

Fonte: dados da pesquisa (2021)

Classe	FO	TM	Custo estoque	Custo abertura	Custo setup	Custo atraso
3	159448	6534	63784	0	25169	70495
4	226461	7127	62383	61428	23802	78849
5	270624	7205	74135	86259	27248	82982

Legenda: FO – valor médio das soluções factíveis de cada classe; TM – tempo médio de execução de cada classe, em segundos; Custo estoque – valor médio do custo do estoque de cada classe; Custo abertura – valor médio do custo de abertura das linhas de produção de cada classe; Custo setup – custo médio de setup das linhas de produção de cada classe, ou seja, o custo médio de preparação para produção; Custo atraso – custo médio de atraso (*backlogging*) de cada classe no atendimento das demandas dos clientes.

Na Tabela 4, as colunas FO, DB, NMN, NMI, GAPmed, GAPmin e GAPmax contêm as mesmas descrições apresentadas na Tabela 2.

Os resultados do experimento computacional apresentam uma redução bastante significativa do GAP médio (GAPmed) das classes 3, 4 e 5 de 3,0%, 3,17% e 5,13%, respectivamente. Enquanto que o GAP máximo (GAPmax) das classes 3 e 4 foram 13,20% e 12,48% respectivamente. Já na classe 5, onde o *solver* não conseguiu solucionar as instâncias houve variação de 0,32% (GAPmin) a 14,81% (GAPmax).

Na Tabela 5, detalham-se as soluções obtidas pelo *solver* para as classes 3, 4 e 5 com tempo máximo de execução de 2 horas (7200 segundos). As colunas FO e TM contêm as mesmas descrições apresentadas na Tabela 2. As colunas Custo estoque, Custo setup e Custo atraso contêm as mesmas descrições apresentadas para a Tabela 3 enquanto a coluna Custo abertura apresenta o valor médio do custo de abertura das linhas de produção.

Mesmo expandindo o tempo máximo de execução para duas horas o *solver* não conseguiu resolver todas as instâncias das classes 3, 4, 5 o que evidencia o quão desafiador é o problema.

## 6 Considerações finais

Neste trabalho, um modelo matemático foi descrito e proposto para a representação de um problema de planejamento de produção que ocorre em indústrias alimentícias brasileiras produtoras de carnes embaladas. Uma estimativa foi apresentada para o número de variáveis contínuas e binárias, bem como uma estimativa para a quantidade de restrições com as quais o *solver* utilizará para solucionar o problema. Também foi demonstrado que a classe de complexidade computacional do problema abordado é NP-difícil.

Através de um estudo computacional realizado com instâncias baseadas na literatura, foi possível identificar que instâncias de grande porte são bastante desafiadoras do ponto de vista computacional, evidenciando a necessidade de investigação de métodos customizados de solução do problema abordado.

Deste modo, como perspectivas para trabalhos futuros, os autores apontam a investigação de abordagens baseadas em relaxação Lagrangiana, bem como heurísticas baseadas na formulação matemática do problema, tais como *relax-and-fix* e *fix-and-optimize*. Este trabalho tem grande relevância para melhorar a solução do problema abordado em Soler, Santos e Akartunali (2021). Além disso, com modificações simples no modelo matemático proposto, ele pode ser aplicado à indústria automobilística e a outras indústrias que se utilizam de múltiplas linhas e recursos escassos para a produção.

## Financiamento

O presente trabalho foi realizado com apoio da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul – UFMS/MEC – Brasil e também com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (Capes) – Código de Financiamento 001. Pesquisa desenvolvida com a utilização dos recursos computacionais do Centro de Ciências Matemáticas Aplicadas à Indústria (CeMEAI), financiados pela FAPESP (proc.2013/07375-0).

## Conflito de interesses

Os autores declaram não haver conflito de interesses.

## Referências

ALMEDER, C.; ALMADA-LOBO, B. Synchronisation of scarce resources for a parallel machine lotsizing problem. **International Journal of Production Research**, v. 49, n. 24, p. 7315-7335, 2011. DOI: <https://dx.doi.org/10.1080/00207543.2010.535570>.

AMORIM, P.; BELO-FILHO, M. A. F.; TOLEDO, F. M. B.; ALMEDER, C.; ALMADA-LOBO, B. Lot sizing versus batching in the production and distribution planning of perishable goods. **International Journal of Production Economics**, v. 146, n. 1, p. 208-218, 2013a. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.07.001>.

AMORIM, P.; MEYR, H.; ALMEDER, C.; ALMADA-LOBO, B. Managing perishability in production-distribution planning: a discussion and review. **Flexible Services and Manufacturing Journal**, v. 25, n. 3, p. 389-413, 2013b. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10696-011-9122-3>.

BRASIL. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. Secretaria de Inspeção de Produto Animal. **Portaria nº 5, de 8 de novembro de 1988**. Aprova a padronização dos cortes de carne bovina. Brasília, DF: Ministério da Agricultura, 1988. Disponível em: [https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/suasa/regulamentos-tecnicos-de-identidade-e-qualidade-de-produtos-de-origem-animal-1/ilovepdf\\_merged.pdf](https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/suasa/regulamentos-tecnicos-de-identidade-e-qualidade-de-produtos-de-origem-animal-1/ilovepdf_merged.pdf). Acesso em: 10 jun. 2021.

CHEN, W.-H.; THIZY, J.-M. Analysis of relaxations for the multi-item capacitated lot-sizing problem. **Annals of Operations Research**, v. 26, n. 1-4, p. 29-72, 1990. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/BF02248584>.

COSTA, A. M.; SANTOS, L. M. R.; ALEM, D. J.; SANTOS, R. H. S. Sustainable vegetable crop supply problem with perishable stocks. **Annals of Operations Research**, v. 219, n. 1, p. 265-283, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/s10479-010-0830-y>.

DREXL, A.; HAASE, K. Proportional lotsizing and scheduling. **International Journal of Production Economics**, v. 40, n. 1, p. 73-87, 1995. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/0925-5273\(95\)00040-U](https://dx.doi.org/10.1016/0925-5273(95)00040-U).

EPPEN, G. D.; MARTIN, R. K. Solving multi-item capacitated lot-sizing problems using variable redefinition. **Operations Research**, v. 35, n. 6, p. 832-848, Dec. 1987. DOI: <https://dx.doi.org/10.1287/opre.35.6.832>.

FLEISCHMANN, B. The discrete lot-sizing and scheduling problem. **European Journal of Operational Research**, v. 44, n. 3, p. 337-348, 1990. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(90\)90245-7](https://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(90)90245-7).

FLEISCHMANN, B. The discrete lot-sizing and scheduling problem with sequence-dependent setup costs. **European Journal of Operational Research**, v. 75, n. 2, p. 395-404, 1994. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/0377-2217\(94\)90083-3](https://dx.doi.org/10.1016/0377-2217(94)90083-3).

FLEISCHMANN, B.; MEYR, H. The general lotsizing and scheduling problem. **Operations-Research-Spektrum**, v. 19, n. 1, p. 11-21, 1997. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/BF01539800>.

GLOCK, C. H.; GROSSE, E. H.; RIES, J. M. The lot sizing problem: a tertiary study. **International Journal of Production Economics**, v. 155, p. 39-51, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ijpe.2013.12.009>.

GUIMARÃES, L.; KLABJAN, D.; ALMADA-LOBO, B. Modeling lotsizing and scheduling problems with sequence dependent setups. **European Journal of Operational Research**, v. 239, n. 3, p. 644-662, 2014. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.ejor.2014.05.018>.

HAASE, K. Capacitated lot-sizing with sequence dependent setup costs. **Operations-Research-Spektrum**, v. 18, n. 1, p. 51-59, 1996. DOI: <https://dx.doi.org/10.1007/BF01539882>.

JAMES, R. J. W.; ALMADA-LOBO, B. Single and parallel machine capacitated lotsizing and scheduling: New iterative MIP-based neighborhood search heuristics. **Computers & Operations Research**, v. 38, n. 12, p. 1816-1825, 2011. DOI: <https://dx.doi.org/10.1016/j.cor.2011.02.005>.

KARIMI, B.; GHOMI, S. M. T. F.; WILSON, J. M. The capacitated lot sizing problem: a review of models and algorithms. **Omega**, v. 31, n. 5, p. 365-378, 2003. DOI: [https://doi.org/10.1016/S0305-0483\(03\)00059-8](https://doi.org/10.1016/S0305-0483(03)00059-8).

KARMAKAR, U. S.; SCHRAGE, L. The deterministic dynamic product cycling problem. **Operations Research**, v. 33, n. 2, p. 326-345, 1985. DOI: <https://dx.doi.org/10.1287/opre.33.2.326>.

MEYR, H. Simultaneous lotsizing and scheduling by combining local search with dual reoptimization. **European Journal of Operational Research**, v. 120, n. 2, p. 311-326, 2000. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(99\)00159-9](https://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(99)00159-9).

MEYR, H. Simultaneous lotsizing and scheduling on parallel machines. **European Journal of Operational Research**, v. 139, n. 2, p. 277-292, 2002. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217\(01\)00373-3](https://dx.doi.org/10.1016/S0377-2217(01)00373-3).

MLADENOVIĆ, N.; HANSEN, P. Variable neighborhood search. **Computers & Operations Research**, v. 24, n. 11, p. 1097-1100, 1997. DOI: [https://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548\(97\)00031-2](https://dx.doi.org/10.1016/S0305-0548(97)00031-2).

OLIVEIRA, W. A.; SANTOS, M. O. A new branching rule to solve the capacitated lot sizing and scheduling problem with sequence dependent setups. **Tendências em Matemática Aplicada e Computacional (TEMA)**, v. 18, n. 3, p. 515-529, 2017. Disponível em: <https://www.scielo.br/j/tema/a/khHKLq7DhLyFJhVhVNJqdzjZg/?lang=en>. Acesso em: 5 maio 2021.

PIRES, M. J.; AMORIM, P.; MARTINS, S.; ALMADA-LOBO, B. Production planning of perishable food products by mixed-integer programming. *In*: ALMEIDA, J. P.; OLIVEIRA, J. F.; PINTO, A. A. (org.). **Operational Research: IO 2013 - XVI Congress of APDIO**, Bragança, Portugal, June 3-5, 2013. Cham: Springer, 2015. p. 331-352. DOI: [https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-20328-7\\_19](https://dx.doi.org/10.1007/978-3-319-20328-7_19).

ROGERS, J. A computational approach to the economic lot scheduling problem. **Management Science**, v. 4, n. 3, p. 264-291, 1958. DOI: <https://dx.doi.org/10.1287/mnsc.4.3.264>.

SOLER, W. A. O.; POLDI, K. C.; SANTOS, M. O. Capacitated lot sizing and scheduling with order acceptance and delivery time windows: mathematical model and a MIP-based heuristic. **Pesquisa Operacional**, v. 39, n. 3, p. 471-496, 2019. DOI: <https://dx.doi.org/10.1590/0101-7438.2019.039.03.0471>.

SOLER, W. A. O.; SANTOS, M. O.; AKARTUNALI, K. MIP approaches for a lot sizing and scheduling problem on multiple production lines with scarce resources, temporary workstations, and perishable products. **Journal of the Operational Research Society**, v. 72, n. 8, p. 1691-1706, 2021. DOI: <https://dx.doi.org/10.1080/01605682.2019.1640588>.

TRIGEIRO, W. W.; THOMAS, L. J.; MCCLAIN, J. O. Capacitated lot sizing with setup times. **Management Science**, v. 35, n. 3, p. 353-366, 1989. DOI: <https://dx.doi.org/10.1287/mnsc.35.3.353>.

WAGNER, H. M.; WHITIN, T. M. Dynamic version of the economic lot size model. **Management Science**, v. 5, n. 1, p. 89-96, 1958. DOI: <https://dx.doi.org/10.1287/mnsc.5.1.89>.

WEI, W.; AMORIM, P.; GUIMARÃES, L.; ALMADA-LOBO, B. Tackling perishability in multi-level process industries. **International Journal of Production Research**, v. 57, n. 17, p. 5604-5623, 2019. DOI: <https://dx.doi.org/10.1080/00207543.2018.1554916>.