

Análise não linear geométrica de treliças planas de madeira a partir do método dos elementos finitos posicional

Thiago Damasceno Silva^[1], André Luis Christoforo^[2], Tarniê Nunes Vilela Narques^[3], Julia Naves Teixeira^[4], Francisco Antonio Rocco Lahr^[5]

[1] damasceno.tds@gmail.com. [2] christoforoal@yahoo.com.br. [3] tarnie.projetos@gmail.com. [4] julianavest@gmail.com. Universidade Federal de São Carlos (UFSCar), Departamento de Engenharia Civil (DECiv). [5] frocco@sc.usp.br. Universidade de São Paulo (USP), Escola de Engenharia de São Carlos (EESC), Departamento de Engenharia de Estruturas (SET).

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se uma metodologia para análise não linear geométrica de sistemas treliçados planos de madeira, a partir de uma formulação posicional do método dos elementos finitos. Dois modelos de treliça são analisados e madeiras folhosas com classe de resistência C60 são consideradas na composição das barras. A formulação do elemento finito é realizada a partir da minimização da energia potencial total, cujo sistema de equações é não linear em relação às posições nodais da estrutura e sua resolução é alcançada empregando o método de Newton-Raphson. Os resultados obtidos são comparados aos de uma análise linear geométrica para cada modelo, sendo possível observar que esta análise (linear) pode conduzir a valores inferiores de esforços internos e deslocamentos, o que influencia a etapa de dimensionamento e eventualmente pode oferecer riscos à segurança estrutural. Conclui-se que o emprego de análise não linear geométrica deve ser priorizado no projeto de treliças de madeira, mesmo que isso implique em maior custo computacional e complexidade envolvida no procedimento de análise.

Palavras-chave: Treliças de madeira. Análise não linear geométrica. Método dos elementos finitos. Formulação posicional.

ABSTRACT

This work presents a methodology for geometric nonlinear analysis of two-dimensional timber trusses, obtained from a position based formulation of the finite element method. Two truss models area analyzed, and hardwoods with strength class C60 are considered in the members. The finite element formulation is performed from the minimization of the total potential energy, whose nonlinear system of equations is given in relation to the nodal positions of the structure and its resolution is achieved using the Newton-Raphson method. The results obtained are compared to those of a linear geometric analysis for each model, and it can be observed that this linear analysis can lead to internal forces and displacements with lower values, which influences the design and may eventually offer structural safety risks. It is possible to conclude that the use of geometric nonlinear analysis should be prioritized in the design of timber trusses, even if this implies higher computational cost and complexity involved in the analysis procedure.

Keywords: Timber trusses. Geometric nonlinear analysis. Finite element method. Positional formulation.

1 Introdução

Diversos avanços relacionados à capacidade resistente de estruturas de madeira têm sido observados nas últimas décadas, incluindo a industrialização de peças compostas e diversos tipos de reforço estrutural, que contribuem para o emprego de elementos mais esbeltos. Esses elementos possibilitam ganhos de economia e otimização do material, sendo utilizados em diversas aplicações na construção civil, principalmente em sistemas estruturais de edifícios, coberturas, torres e pontes (CALIL JUNIOR; LAHR; DIAS, 2003).

Ainda que elementos esbeltos e mais flexíveis possibilitem diversas vantagens, é evidente que podem sofrer grandes deslocamentos e instabilidade, dependendo de suas propriedades físicas e geométricas, não sendo recomendável a análise de seu equilíbrio na configuração indeformada (CRISFIELD, 1990). Assim, uma formulação que permita a análise não linear geométrica da estrutura deve ser adotada, devido à necessidade de avaliar seu comportamento de acordo com a deformação. A formulação posicional baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF), concebida por Coda (2003) e colaboradores, tem se destacado como uma opção interessante devido à eficácia de sua abordagem e precisão dos resultados.

Dessa forma, neste trabalho utiliza-se uma metodologia de análise não linear geométrica obtida a partir da formulação posicional do MEF, para avaliar o comportamento de treliças planas de madeira. São avaliados dois modelos de treliça plana, com dimensões tipicamente empregadas na construção civil nacional, considerando madeiras folhosas com classe de resistência C60 segundo a norma brasileira NBR 7190 (ABNT, 1997). A formulação do elemento finito é realizada a partir da minimização da energia potencial total, sendo as posições nodais da estrutura adotadas como variáveis principais. O sistema de equações gerado é não linear em relação a essas posições, sendo empregado o método de Newton-Raphson para resolução. Nos casos estudados, busca-se constatar a variação dos deslocamentos e esforços internos nas barras, comparando os valores obtidos segundo as análises geometricamente linear e não linear.

2 Referencial teórico

Em geral, pode-se notar que não há ampla discussão sobre a análise não linear geométrica

de estruturas de madeira no Brasil. A escassez de trabalhos voltados especificamente a estruturas de madeira e a ausência de diretrizes da norma brasileira relacionadas ao assunto podem ter contribuído para esse cenário.

Por um lado, as normas de dimensionamento de estruturas de aço (ABNT, 2008) e de concreto armado e protendido (ABNT, 2014) mencionam a necessidade de empregar análise não linear geométrica de acordo com a deslocabilidade da estrutura. Além disso, nessas normas são propostos métodos aproximados para a previsão do comportamento não linear geométrico de estruturas com certos limites de esbelteza, como o método da amplificação dos esforços (no caso das estruturas de aço) e o método γ_z (no caso das estruturas de concreto).

Por outro lado, a norma brasileira de dimensionamento de estruturas de madeiras, a NBR 7190 (ABNT, 1997), não faz menção a análises físicas ou geometricamente não lineares. Assim, o procedimento considerando na NBR 7190 (ABNT, 1997) prevê que a estrutura trabalhará a pequenos níveis de deslocamento e deformação, em relação à geometria original, o que pode não corresponder ao comportamento real e limitar suas possíveis aplicações.

A formulação posicional do MEF voltada à análise não linear geométrica foi proposta originalmente por Coda (2003). Diversos trabalhos seguintes deram continuidade e estenderam o ramo de aplicações do MEF posicional.

Coda e Greco (2004) desenvolveram a formulação posicional do MEF voltada à análise não linear de pórticos planos, utilizando polinômio de aproximação cúbica. A objetividade da metodologia proposta também foi demonstrada. Os resultados obtidos foram comparados aos da literatura e do programa ADINA e foi observada precisão nos valores alcançados.

Greco *et al.* (2006) apresentaram a formulação posicional do MEF para análise não linear de treliças especiais. Exemplos da literatura foram empregados para validar a metodologia proposta, assim como simulações no programa ANSYS. Os resultados também se mostraram satisfatoriamente precisos em relação às simulações efetuadas e à literatura.

A formulação empregada no presente trabalho, adaptada para treliças planas de madeira, foi baseada nas publicações mencionadas e será apresentada na próxima seção.

3 Materiais e métodos

Dois modelos de treliça são propostos para análise, sendo uma treliça tipo torre e um arco treliçado. Em ambos os casos, considera-se que a madeira empregada na estrutura pertence à classe de resistência C60 das madeiras folhosas. Admite-se que o valor médio do módulo de elasticidade paralelo às fibras da madeira seja $E_0 = 24500$ MPa, tanto à tração quanto à compressão, de acordo com a NBR 7190 (ABNT, 1997). Além disso, considera-se que as barras das treliças são dispostas de tal forma que a força axial atua na direção paralela às fibras da madeira e que os nós da treliça são rótulas perfeitas.

Nos dois exemplos de validação, a análise não linear geométrica realizada a partir do Método dos Elementos Finitos Posicional foi comparada a uma análise linear de primeira ordem. Um código em linguagem MATLAB foi utilizado para a implementação computacional da análise proposta. A formulação do elemento finito de treliça é descrita a seguir.

3.1 Método dos elementos finitos posicional

O princípio da mínima energia potencial total é empregado para formulação do elemento finito de treliça voltado para análise não linear geométrica. A energia potencial total (Π) de um corpo em equilíbrio estático é definida na Equação 1, em função da energia de deformação (U) e da energia potencial das forças externas (W).

$$\Pi = U - W \quad (1)$$

A energia de deformação é obtida em função do volume do elemento, conforme Equação 2. Nessa expressão, σ é a tensão normal, ϵ é a deformação de engenharia e V é o volume do elemento.

$$U = \int_V \int_\epsilon \sigma d\epsilon dV = \int_V \frac{1}{2} \cdot E \epsilon^2 dV \quad (2)$$

A energia potencial das forças externas é apresentada na Equação 3, onde F representa o conjunto de forças aplicadas e Y o conjunto de posições independentes que podem ser ocupadas por um ponto do elemento.

$$W = \sum F \cdot Y \quad (3)$$

A energia potencial total, portanto, pode ser reescrita na Equação 4, substituindo a energia de deformação e o potencial das forças externas pelos termos indicados nas equações anteriores.

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_V \epsilon^2 dV - \sum F \cdot Y \quad (4)$$

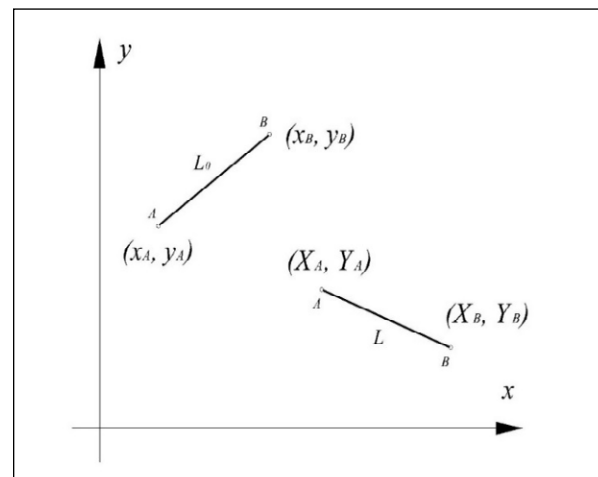
O equilíbrio da estrutura é admitido quando a variação da energia potencial total em relação às coordenadas nodais é nula (condição estacionária), ou seja, quando as derivadas parciais da energia potencial em relação às posições nodais são nulas. Isso também sugere que a força interna em um nó deve ser igual à força externa aplicada sobre ele, caracterizando o equilíbrio, conforme Equação 5.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y} = 0 \Leftrightarrow F_{\text{int}} = F_{\text{ext}} \quad (5)$$

Na formulação posicional do elemento de treliça plana, considera-se que o elemento sofre deformação uniaxial constante, com variação nula da seção transversal. Admite-se que as seções permanecem planas após a deformação (hipótese de Euler-Bernoulli).

Um elemento com coordenadas iniciais dos nós sendo $Y_0 = [x_1, y_1, x_2, y_2]$ é ilustrado na Figura 1. Após a deformação, assume-se que os nós do elemento passam a ocupar as coordenadas $Y = [X_1, Y_1, X_2, Y_2]$.

Figura 1 – Elemento finito de treliça plana



Fonte: elaborado pelos autores

A deformação longitudinal infinitesimal do elemento é definida na Equação 6, onde L_0 é o comprimento inicial do elemento e L é o comprimento após deformação. Como a referência é o comprimento inicial do elemento, a formulação é classificada como Lagrangeana. Caso fosse adotada uma medida de deformação cuja a referência fosse o comprimento atual, a formulação seria denominada Euleriana (CODA, 2018).

$$\varepsilon = \frac{L - L_0}{L_0} = \frac{L}{L_0} - 1 \quad (6)$$

O comprimento inicial do elemento (L_0) é indicado na Equação 7, em função do conjunto de posições iniciais $Y_0 = [x_1, y_1, x_2, y_2]$.

$$L_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (7)$$

De forma análoga, o comprimento após deformação do elemento (L) é apresentado na Equação 8, sendo obtido a partir do conjunto de posições $Y = [X_1, Y_1, X_2, Y_2]$.

$$L = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2} \quad (8)$$

A partir da Equação 2 e das expressões anteriores, a energia de deformação do elemento pode ser reescrita na Equação 9, admitindo-se que a área de seção transversal (A) e o módulo de elasticidade longitudinal (E) do elemento sejam constantes e a integral seja desenvolvida em função do volume da barra. O termo u_t representa a integral da energia específica de deformação do elemento em relação à área de seção transversal.

$$U = \frac{1}{2} \cdot E \cdot A \cdot \varepsilon^2 \cdot L_0 = L_0 \cdot u_t \quad (9)$$

A energia potencial total (Π) do elemento de treliça plana é então fornecida na Equação 10, substituindo a energia de deformação (U) e a energia potencial das forças externas (W) pelos termos indicados nas Equações 9 e 3, respectivamente. A partir dessa

expressão, a energia potencial total é descrita em função do conjunto de posições nodais do elemento (Y).

$$\Pi = L_0 \cdot u_t - \sum F \cdot Y \quad (10)$$

A variação da energia potencial total é representada na Equação 11, sendo obtida pela primeira derivada parcial em relação às posições nodais. Como são considerados dois graus de liberdade por nó, tem-se $i = 1-4$. As posições nodais (X_1, Y_1, X_2, Y_2) podem ser representadas pelo índice i , variando de um a quatro. Como aludido anteriormente, a variação de Π deve ser nula para que a condição estacionária seja atendida.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial Y_i} = L_0 \frac{\partial u_t}{\partial Y_i} - F_i = 0 \quad (11)$$

O sistema de equações gerado é não linear quanto às posições nodais. Para resolução do sistema de equações não lineares, pode-se utilizar o Método de Newton-Raphson (Equação 12), adotando-se uma estratégia matricial.

$$g(Y) = g(Y_0) + \nabla g(Y_0) \cdot \Delta Y \cong 0 \quad (12)$$

Na Equação 12, as posições nodais iniciais são representadas pelo vetor Y_0 , enquanto Y é o vetor de posições nodais atuais e ΔY é o vetor de correção das posições nodais. O termo $g(Y_0)$ representa o vetor de resíduos e ∇g é a matriz Hessiana. O vetor de resíduos agrupa as primeiras derivadas parciais da energia potencial total em relação às posições nodais, enquanto a matriz Hessiana é obtida conforme as segundas derivadas parciais em relação a essas mesmas posições.

Em síntese, os procedimentos indicados a seguir descrevem o funcionamento do Método de Newton-Raphson aplicado à análise não linear geométrica:

1. Definir Y_0 como a posição inicial dos nós da treliça e calcular o vetor de resíduos $g(Y_0)$.
2. Determinar a matriz Hessiana ∇g .
3. Resolver o sistema de equações a partir da Equação 12 e calcular o vetor de correção das posições nodais ΔY .

4. Atualizar o vetor de posições Y_o considerando $Y_o = Y_o + \Delta Y$.
5. Retornar à etapa 1 até que o vetor ΔY ou sua norma seja suficientemente pequeno, de forma que seja menor ou igual à tolerância adotada.

Para que o processo seja considerado iterativo-incremental, o carregamento total é dividido em incrementos cumulativos, os quais são aplicados gradualmente à estrutura.

Com relação ao sistema estrutural, a montagem dos vetores e matrizes é realizada de forma semelhante ao procedimento adotado nas análises convencionais do MEF, que consiste em agrupar os termos referentes aos respectivos nós e graus de liberdade em comum. Contudo, não há necessidade de introduzir transformações de coordenadas na formulação posicional, como sistemas de coordenadas locais ou globais, o que reduz o trabalho algébrico do problema.

4 Resultados e discussão

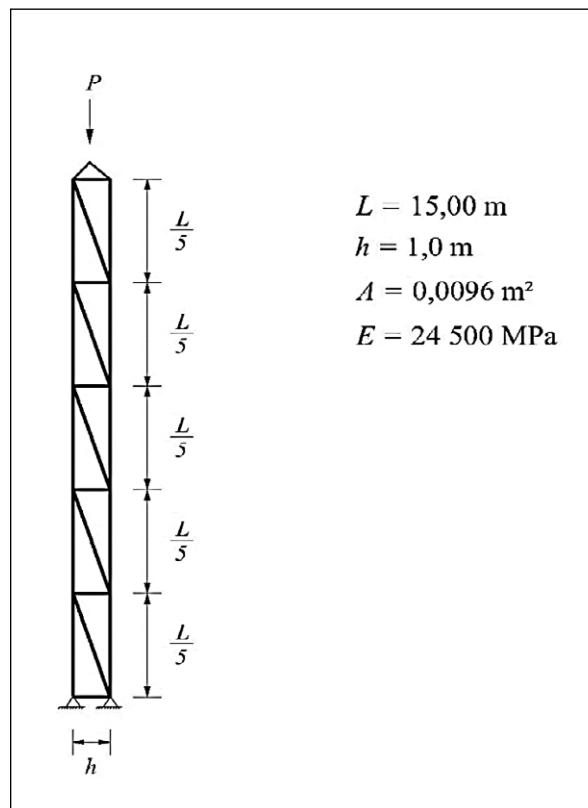
Dois modelos de treliças planas de madeira foram estudados, sendo comparada a influência das análises linear e não linear geométrica na variação dos deslocamentos e esforços normais de acordo com o aumento das solicitações.

Na análise não linear geométrica, como critério de parada foi considerada uma tolerância de 10^{-7} para a norma do vetor ΔY determinado segundo a resolução do sistema de equações não lineares pelo Método de Newton-Raphson, para cada incremento de força. Ao todo, foram considerados 100 incrementos de força para cada modelo de treliça.

4.1 Treliça torre

A primeira treliça analisada é do tipo torre (Figura 2), que possui comprimento total de 16 m e é birrotulada em sua base. Outras propriedades físicas e geométricas da treliça são também indicadas na Figura 2. O módulo de elasticidade adotado é equivalente ao de uma madeira folhosa classe C60, na direção paralela às fibras. Considera-se a ação de uma força vertical P aplicada ao nó localizado na extremidade livre da treliça, como representado na Figura 2. De um modo geral, percebe-se que a força P tende a comprimir a treliça. A treliça possui 13 nós e 23 elementos no total.

Figura 2 – Treliça torre

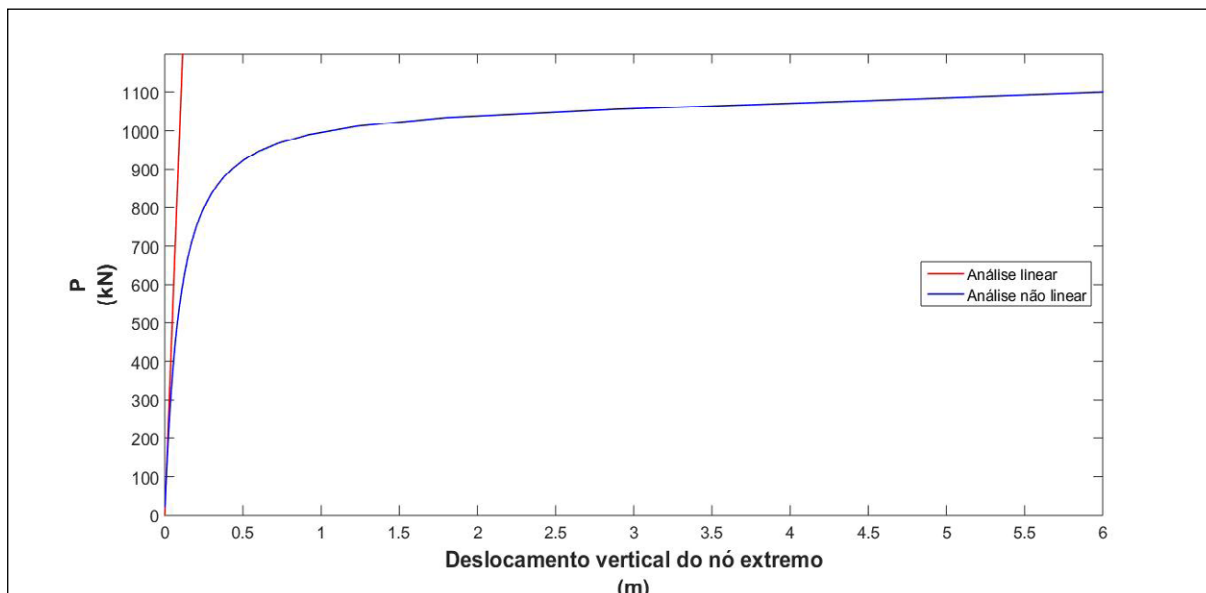


Fonte: dados da pesquisa

O deslocamento do nó localizado na extremidade livre é relacionado com a intensidade da força P na Figura 3. O deslocamento aumenta significativamente quando $P > 600 \text{ kN}$, visto que a variação entre os valores do deslocamento obtidos a partir das duas análises supera 50%. O deslocamento cresce de maneira ainda mais acentuada entre 900 kN e 1100 kN, considerando os resultados determinados pela análise não linear. Esse aumento desproporcional do deslocamento sugere que a instabilidade da treliça foi atingida no intervalo.

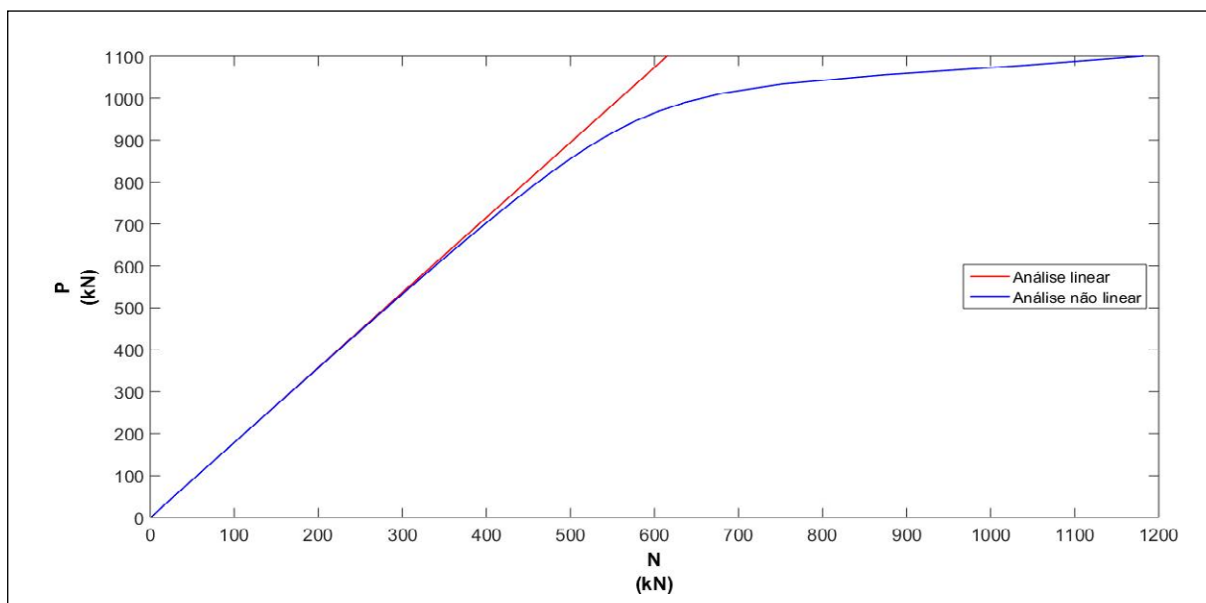
Na Figura 4, o gráfico ilustra a variação do esforço normal de compressão na barra mais solicitada da treliça segundo o aumento da força P . Até uma força próxima de 700 kN, ambas as análises fornecem resultados semelhantes para o esforço normal. Essa solicitação possivelmente não seria alcançada em serviço, uma vez que ocorreria uma provável ruptura do material primeiramente. Assim, o valor do esforço normal obtido pela análise linear não ofereceria riscos caso fosse adotado no dimensionamento, considerando os resultados alcançados.

Figura 3 – Gráfico força-deslocamento (torre treliçada)



Fonte: dados da pesquisa

Figura 4 – Variação do esforço normal na barra mais solicitada (torre treliçada)



Fonte: dados da pesquisa

4.2 Arco treliçado

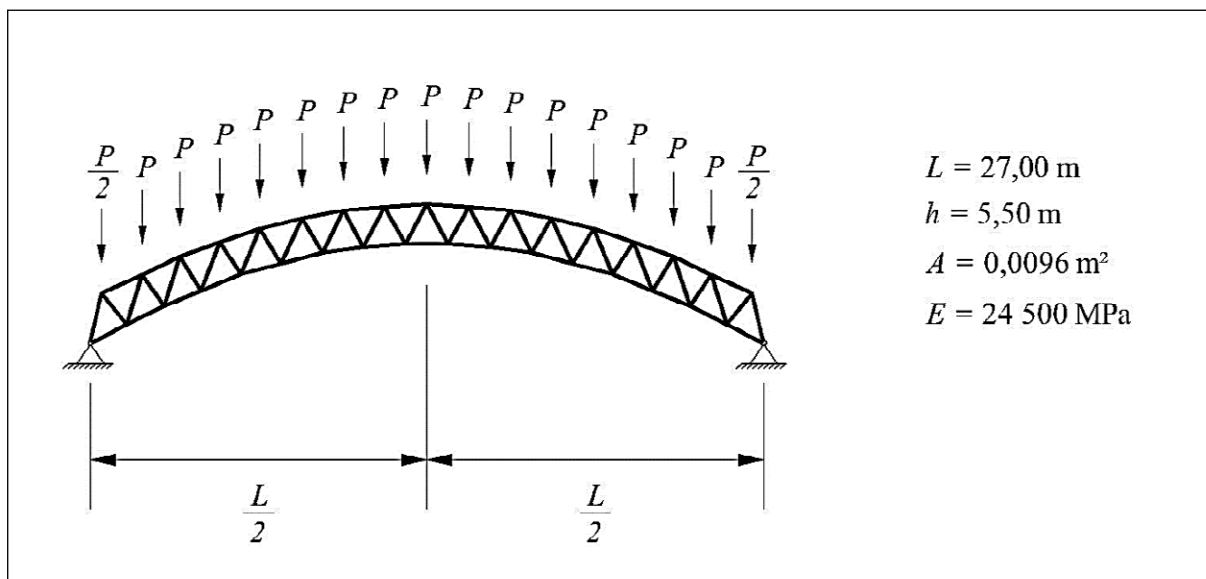
O segundo sistema analisado é um arco treliçado biarticulado de madeira (Figura 5), com forma parabólica, vão de 27 m e altura total de 5,5 m. Esse sistema é uma opção eficiente para utilização como estrutura de coberturas de madeira de médios e longos vãos, acima de 25 m, conforme discutido por Lahr (1978). Para análise não linear geométrica,

devido à simetria do arco e das áreas de influência, considera-se que uma força vertical P é aplicada aos nós internos do banzo superior do arco, enquanto os nós de extremidade desse mesmo banzo permanecem sujeitos a apenas metade da força. As barras mais solicitadas localizam-se no banzo inferior do arco, próximas aos apoios. O arco treliçado possui 33 nós e 63 elementos no total.

O gráfico que relaciona o deslocamento do nó central do banzo superior e a intensidade de P é indicado na Figura 6. Considerando a curva obtida pela análise não linear geométrica, nota-se maior variação do deslocamento quando P supera 400 kN, em que

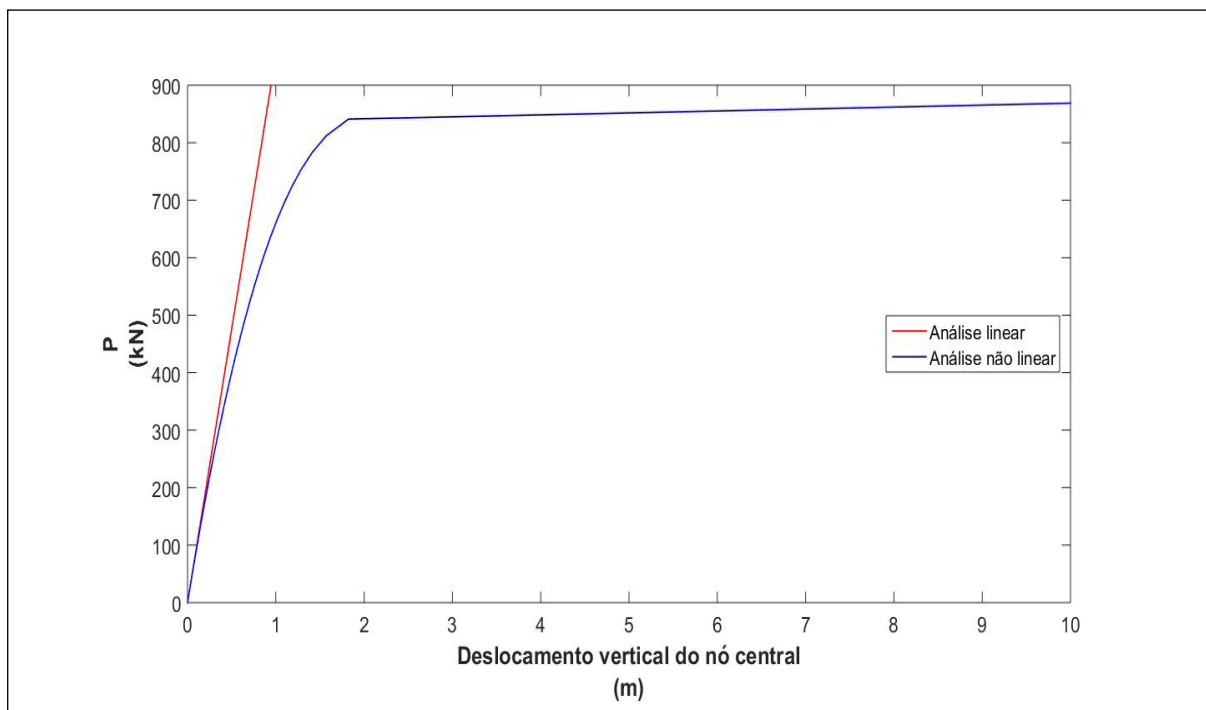
há uma diferença percentual de 15% entre as duas análises. Quando $P > 800$ kN, o deslocamento aumenta de forma significativa em relação ao acréscimo de força, sugerindo a instabilidade do arco treliçado.

Figura 5 – Arco treliçado



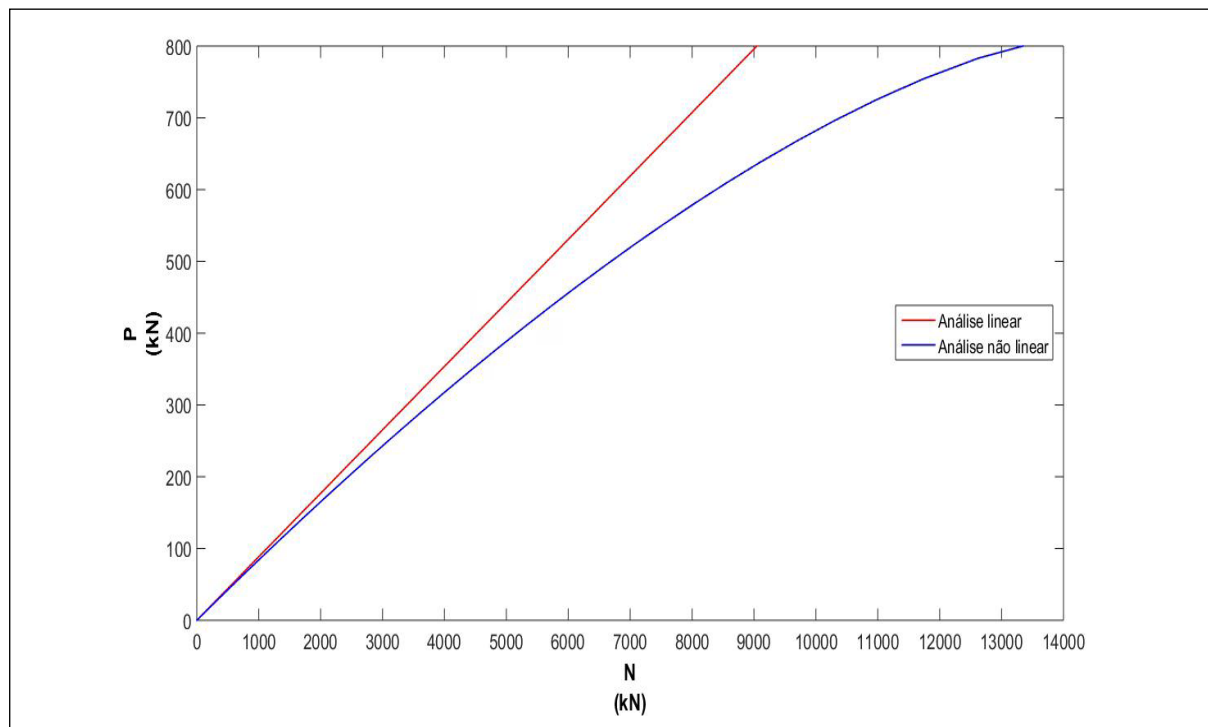
Fonte: dados da pesquisa

Figura 6 – Gráfico força-deslocamento (arco treliçado)



Fonte: dados da pesquisa

Figura 7 – Variação do esforço normal na barra mais solicitada (arco treliçado)



Fonte: dados da pesquisa

Outro gráfico é apresentado na Figura 7, que relaciona o esforço normal de compressão (N), na barra mais solicitada do arco, com a intensidade das forças externas P . Observa-se que ocorre variação nos valores obtidos pelas duas análises já nos primeiros níveis de carregamento, visto que o esforço normal obtido pela análise não linear geométrica é maior a partir de $P > 100$ kN. Apesar dessas forças externas possuírem uma intensidade notável considerando a área da seção transversal dos elementos ($A = 0,0096$ m²), é presumível que tal carregamento possa ser alcançado em serviço antes que a ruptura da madeira ocorra. Logo, é imprescindível que os valores obtidos a partir da análise não linear sejam considerados no dimensionamento do arco treliçado, uma vez que são mais precisos em relação ao comportamento estrutural.

4.3 Discussão final

Considerando os dois modelos de treliças abordadas no trabalho, no geral o arco treliçado foi mais susceptível a deslocamentos e esforços internos obtidos conforme a análise não linear geométrica.

A formulação posicional adotada dispensou o processo de transformação de coordenadas dos nós, o que contribuiu para agilizar a implementação computacional e tornar o código em linguagem MATLAB mais compacto.

Embora a análise não linear geométrica exija procedimentos mais sofisticados e maior custo computacional, é notório que sua utilização deve ser priorizada quando possível, visto que possibilita a obtenção de resultados mais precisos que uma análise linear.

5 Conclusão

A influência da análise não linear geométrica foi mais perceptível no caso do arco treliçado. Além disso, de um modo geral, foi possível observar que a análise linear geométrica pode proporcionar valores inferiores de esforços internos e deslocamentos, dependendo da solicitação e das propriedades da estrutura. Essa variação influencia a etapa de dimensionamento e eventualmente pode oferecer riscos à segurança da estrutura. Logo, o emprego de análise não linear geométrica deve ser priorizado no projeto de treliças de madeira, mesmo que implique em maior

custo computacional e complexidade envolvida no procedimento de análise. Nesse contexto, a formulação posicional mostrou-se como uma estratégia interessante para a análise não linear geométrica dessas treliças, uma vez que é alcançada a partir de equações intuitivas e não envolve a transformação de coordenadas dos elementos.

Estruturas) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 1978.

REFERÊNCIAS

ABNT. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190 – Projeto de estruturas de madeira**. ABNT: Rio de Janeiro, 1997.

ABNT. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8800 – Projeto de estruturas de aço e de estruturas mistas de aço e concreto de edifícios**. ABNT: Rio de Janeiro, 2008.

ABNT. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118 – Projeto de estruturas de concreto — Procedimento**. ABNT: Rio de Janeiro, 2014.

CALIL JUNIOR, C.; LAHR, F. A. R.; DIAS, A. A. **Dimensionamento de elementos estruturais de madeira**. Barueri: Manole, 2003.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas**: uma formulação posicional baseada no MEF. 2003. Tese (Texto complementar para concurso de professor titular) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2003.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, p. 3541-3557, 2004.

CODA, H. B. **O método dos elementos finitos posicional**: análise estática e dinâmica. São Carlos: EESC/USP, 2018.

CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for nonlinear three dimensional beam-elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 81, p. 131-150, 1990.

GRECO, M.; GESUALDO, F. A. R.; VENTURINI, W. S.; CODA, H. B. Nonlinear positional formulation for space truss analysis. **Finite Elements in Analysis and Design**, v. 42, p. 1079-1086, 2006.

LAHR, F. A. R. **Arco treliçado de madeira**. 1978. Dissertação (Mestrado em Engenharia de