

# Confiabilidade estrutural e simulação numérica de vigas de Madeira Lamelada Colada (MLC) reforçadas com fibra sintética

Ramon Vilela <sup>[1]</sup>, Nilson Tadeu Mascia <sup>[2]</sup>, Bruno Fazendeiro Donadon <sup>[3]</sup>

[1] ramonvilela@outlook.com. Universidade Estadual de Campinas/Departamento de Estruturas da FEC. [2] ntm@unicamp.br. Universidade Estadual de Campinas/Departamento de Estruturas da FEC. [3] donadon.bf@gmail.com. Universidade Estadual de Campinas/Departamento de Estruturas da FEC.

## RESUMO

As vigas de Madeira Lamelada Colada (MLC) têm sido amplamente empregadas em estruturas que exigem o uso de vãos e formas não convencionais. Em casos que são requeridos elementos estruturais com maior resistência e/ou rigidez, o uso de reforço estrutural pode ser necessário para que os elementos atendam aos requisitos de projeto. Entretanto, as normas brasileiras não contemplam um método para análise e dimensionamento de elementos de madeira reforçados por fibras. Nesse sentido, este trabalho visa avaliar a confiabilidade estrutural do dimensionamento de vigas de MLC da espécie *Pinus taeda* reforçadas com fibras de Vectran® via método dos elementos finitos. Simulações numéricas foram realizadas através do software ANSYS®, tendo como parâmetros de resistência e rigidez para a viga aqueles estabelecidos pela norma brasileira de estruturas de madeira e a teoria dos volumes para estimar os parâmetros físico-mecânicos para reforço com fibras. A probabilidade de falha do dimensionamento foi aplicando a simulação de Monte Carlo por meio de um programa implementado em linguagem Matlab®. A variação das propriedades mecânicas da madeira, adesivo e fibra foi considerada nessa simulação, bem como as correlações de Pearson entre elas. Constatou-se que a aplicação do reforço melhorou as capacidades de resistência nos estados limites últimos e de serviço. Além disso, os carregamentos médios limites produzidos pelos modelos normativos demonstraram-se mais conservadores quanto ao estado limite último, comparado ao método probabilístico.

**Palavras-chave:** Madeira lamelada colada. Reforço estrutural. Elementos finitos. Confiabilidade estrutural.

## ABSTRACT

*Glued Laminated Timber beams have been widely used in structures that requires the use of unconventional spans and shapes. In some cases, structural elements with higher strength and/or stiffness may be needed and then structural reinforcement is required to meet the design requirements. However, Brazilian standards do not include a method for analyzing and sizing fiber-reinforced timber elements. In this sense, this work aims to evaluate the structural reliability of the design of glued laminated timber beams of *Pinus taeda* species reinforced by Vectran fibers via the finite element method. For this, numerical simulations were performed using ANSYS software, having as strength and stiffness parameters for the beam those established by the Brazilian standard of wood structures and volume theory to estimate the physical-mechanical parameters for fiber reinforcement. The design probability of failure had has assessed by applying the Monte Carlo simulation using a program implemented in Matlab® language. The variation in the mechanical properties of wood, adhesive, and fiber had has considered in this simulation, as well as Pearson's correlations between them. Thus, the reinforcement application improves the strength in the ultimate and service limit states. Moreover, the averages of limit loads by the various normative methods shown to be more conservative in ultimate limit state compared to the probabilistic method.*

**Keywords:** Timber. Glulam. Structural reinforcement. Finite elements. Structural reliability.

## 1 Introdução

Peças de Madeira Laminada Colada (MLC) são identificadas como uma evolução significativa de elementos estruturais de madeira serrada. Essa constatação é possível de confirmação considerando-se: processo produtivo com um controle de qualidade mais rigoroso; aumento de sua rigidez e capacidade de resistência médias proporcionados pela classificação da matéria prima; redução da variabilidade de propriedades físicas e geométricas (FIORELLI; DIAS, 2011). Vigas de MLC têm sido amplamente empregadas em estruturas nas quais a arquitetura exige o uso de vãos e formas não convencionais, o que acaba demandando um dimensionamento mais refinado através de métodos numéricos como, por exemplo, o de elementos finitos (MASCIA *et al.*, 2018).

A associação de materiais como reforço estrutural em vigas de MLC é uma técnica que vem sendo estudada a fim de se compreender o desempenho mecânico do MLC reforçado (VILELA; MASCIA; DONADON, 2019). Essa técnica demonstrou grande eficiência quando aplicada em vigas de MLC produzidas com madeira de espécies de baixas resistência e rigidez como forma de melhorar essas propriedades (HERNANDEZ *et al.*, 1997). Além disso, o reforço pode contribuir para o aumento da resistência à flexão, alterando o modo de ruptura de frágil para uma ruptura mais dúctil, conforme Bertoline *et al.* (2016). Tais reforços são usualmente realizados por compósitos produzidos por materiais metálicos, como fibra de carbono, ou fibrosos, como as sintéticas de vidro, poliméricas ou naturais, tendo adesivo estrutural como matriz aglomerante (RAFTERY; HARTE, 2011; SOLAROV; GLISIC, 2014; GLIŠOVI *et al.*, 2017; MASCIA, DONADON e VILELA, 2019).

De modo similar a diversas normas estrangeiras, as normas brasileiras utilizam os Estados Limites para garantir a segurança da estrutura. Esse, por sua vez, consiste em um método semiprobabilístico, baseado na estimativa de propriedades e carregamentos característicos modificados para se tornarem propriedades e carregamentos de projeto (ALMEIDA, 2008). Entretanto, o dimensionamento de elementos de MLC reforçados ainda não é previsto pelas normas brasileiras. Esse fato inibe o uso da técnica de reforço estrutural, que permitiria a redução de seção transversal, aumento de rigidez, capacidade de resistência ou mesmo um incremento na carga de utilização do projeto.

Alternativamente, métodos de confiabilidade podem ser empregados para estimar a segurança do dimensionamento da estrutura, levando-se em consideração a variação das variáveis envolvidas, como propriedades físicas, mecânicas, geométricas, além do carregamento (DEFILTRO; GOMES, 2016). Dentre os métodos conhecidos para análise de confiabilidade estrutural, o modelo de Monte Carlo é um dos amplamente aplicados e é baseado em uma amostragem artificial gerada a partir da distribuição de probabilidade das variáveis do projeto (BARBOSA; FREITAS; NEVES, 2005)

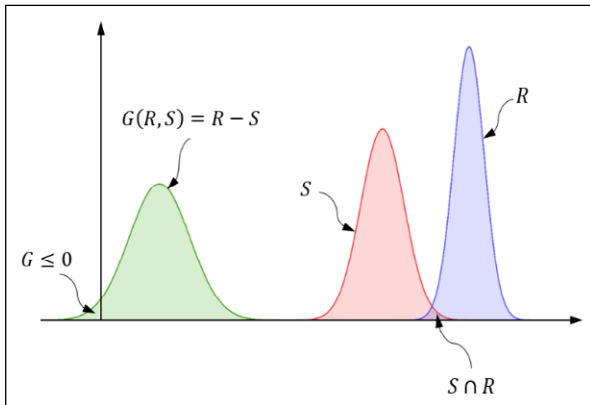
Nesse contexto, a fim de contribuir para a elaboração de normas técnicas nacionais a respeito de estruturas de madeira reforçadas, este artigo tem por objetivo analisar o comportamento de vigas de MLC reforçadas com fibras sintéticas simuladas numericamente pelo software comercial ANSYS® utilizando o método semiprobabilístico e comparar tais resultados à probabilidade de falha obtida por simulações de Monte Carlo.

## 2 Confiabilidade estrutural

O conceito de segurança de uma estrutura consiste em garantir que a capacidade de resistência dos elementos seja maior que os esforços solicitantes, ou seja,  $R > S$ . Essa condição também é conhecida por estado limite. A falha de uma estrutura ocorre quando existem esforços solicitantes que superam a resistência do elemento. Representado por funções de distribuição, na Figura 1 (página seguinte), tem-se a distribuição de solicitações ( $S$ ) e de resistência ( $R$ ), sendo que a intersecção entre ambas as funções ( $S \cap R$ ) será a probabilidade de falha da estrutura. Ainda na Figura 1, a região da função de falha ( $G$ ) que resulta em valores menores ou igual a 0 é aquela que representa a falha estrutural (ALMEIDA, 2008).

O Índice de Confiabilidade ( $\beta$ ), Confiabilidade de Primeira Ordem (FORM), Confiabilidade de Segunda Ordem (FOSM), ou a simulação de Monte Carlo, são exemplos de métodos probabilísticos usualmente empregados para estimar a Probabilidade de Falha ( $P_f$ ) de uma estrutura. Entretanto, é comum que códigos normativos utilizem o método semiprobabilístico para o dimensionamento estrutural, o qual verifica os estados limites empregando certos valores de projeto para as variáveis envolvidas (ALMEIDA, 2008).

**Figura 1** – Funções de resistência (R), solicitação (S) e falha (G) de uma estrutura



Fonte: elaboração própria.

O método de Monte Carlo aplicado à confiabilidade estrutural consiste na simulação estocástica de  $n$  números de variáveis envolvidas, a partir de suas respectivas distribuições de probabilidade, a fim de estimar a probabilidade de falha de uma estrutura ou elemento estrutural. Para isso, Barbosa, Freitas e Neves (2005) demonstram que a probabilidade de falha pode ser expressa discretamente pela Equação (1):

$$P_f = \int \int \int_{\forall x} \dots \int I[G_X(x) \leq 0] f_X(x) dx \quad (1)$$

sendo,  $G_X(x)$  a função de falha e  $I[.]$  a função indicadora que corresponde aos valores expressos na Equação (2).

$$I[.] = \begin{cases} 0 \rightarrow G_X(x) > 0 \\ 1 \rightarrow G_X(x) \leq 0 \end{cases} \quad (2)$$

Discretamente, a Equação (1) pode ser representada pela Equação (3).

$$P_f = \sum_{i=1}^n I[G_X(x) \leq 0] \cdot \frac{1}{n} \quad (3)$$

sendo  $x_i$  a  $i$ -ésima amostra dentre as variáveis geradas aleatoriamente a partir da distribuição de probabilidade da função  $f_X(x)$ .

Nesse sentido, a probabilidade de falha pode ser obtida, pelo método Monte Carlo, conforme a Equação (4).

$$P_f = \frac{N_{G_X(x) \leq 0}}{n} \quad (4)$$

Segundo Almeida (2008), a probabilidade de falha de estruturas pode ter valores máximos estabelecidos em função do estado limite e da Classe de Conformidade, conforme apresentado na Tabela 1. Dessa forma, é possível relacionar o método probabilístico de Monte Carlo com o método semi probabilístico adotado por códigos normativos.

**Tabela 1** – Probabilidades de falha ( $P_f$ ) máximas estimadas por interpolação logarítmica a partir do Índice de Confiabilidade ( $\beta$ ) estabelecido em função de Classes de Confiabilidade (CC) e estados limites

Classes de Confiabilidade	ELU		ELS	
	1 ano de período de referência	50 anos de período de referência	1 ano de período de referência	50 anos de período de referência
CC3	$1,4 \times 10^{-7}$	$7,7 \times 10^{-6}$	-	-
CC2	$1,3 \times 10^{-6}$	$6,4 \times 10^{-5}$	$1,8 \times 10^{-3}$	$6,4 \times 10^{-2}$
CC1	$1,2 \times 10^{-5}$	$4,6 \times 10^{-4}$	-	-

Fonte: adaptado de Almeida (2008).

Para gerar variáveis correlacionadas, o método *Singular Value Decomposition* (SVD) pode ser utilizado para decompor a matriz de correlação entre as variáveis. Em álgebra linear, SVD é determinado

como a fatoração de uma matriz real ou complexa. Pode-se afirmar que esse método é a generalização da autocomposição de uma matriz normal para qualquer matriz ( $M_{m \times n}$ ), por meio da extensão de uma

decomposição polar. Para análise de confiabilidade, sua aplicação é útil para o procedimento de correlacionar variáveis antes não correlacionadas, modificando a matriz de correlação (LEGCHENKO *et al.*, 2017). Esse método pode ser empregado em matrizes positivas ou negativas, o que é uma vantagem quando comparado à decomposição de Cholesky, que necessita que a matriz de correlação seja positiva (SOUKHER *et al.*, 2014).

O coeficiente de correlação é o valor que mensura o grau de correlação entre duas variáveis de escala métrica, além de indicar a direção, que pode ser positiva ou negativa. Sua representação se dá pela letra  $r$  e seu valor varia entre -1 e 1. Geometricamente, o coeficiente de correlação pode ser interpretado como o cosseno do ângulo de inclinação de uma reta que represente a correlação entre duas variáveis (NOWAK; COLLINS, 2000).

### 3 Materiais e métodos

O desenvolvimento deste trabalho iniciou-se por meio de análises experimentais das propriedades físicas e mecânicas de corpos de prova submetidos à flexão simples. Em seguida, tais informações foram utilizadas tanto para a geração estatística das variáveis empregadas no modelo numérico quanto para a estimativa das propriedades para o modelo analítico. Os detalhes de cada etapa estão descritos a seguir.

#### 3.1 Ensaios experimentais

Para obtenção das propriedades físicas e mecânicas da madeira de espécie *Pinus taeda*, foram utilizados 16 corpos de prova com dimensões nominais de (40×40×920)  $mm^3$ , os quais foram submetidos a ensaio de flexão simples com pesagem e aferição de dimensões e umidade. Os equipamentos e métodos utilizados para aferição de tais propriedades estão descritos em Vilela (2020).

As propriedades mecânicas do reforço foram estimadas empregando-se a teoria dos volumes, Equações (5) e (6). Para tanto, foram obtidos, laboratorialmente, os valores de massa e volume do adesivo e da fibra necessários para que os materiais se combinem de forma homogênea.

$$V_i = \frac{P_i}{\rho_i} \cdot (1 - V_v) \cdot \left( \sum_{i=1}^n \frac{P_i}{\rho_i} \right)^{-1} \quad (5)$$

$$E_r = E_f \cdot V_f + E_a \cdot V_a \quad (6)$$

$$f_r = f_f \cdot V_f + f_a \cdot V_a \quad (7)$$

sendo,  $V$  o volume específico,  $P$  e  $\rho$  o peso aparente e o peso específico do componente, respectivamente,  $E$  o módulo de elasticidade longitudinal,  $f$  a resistência à tração, e os índices  $f$ ,  $a$ ,  $v$  e  $r$  indicam a nomenclatura de fibra, adesivo, vazios e reforço, respectivamente.

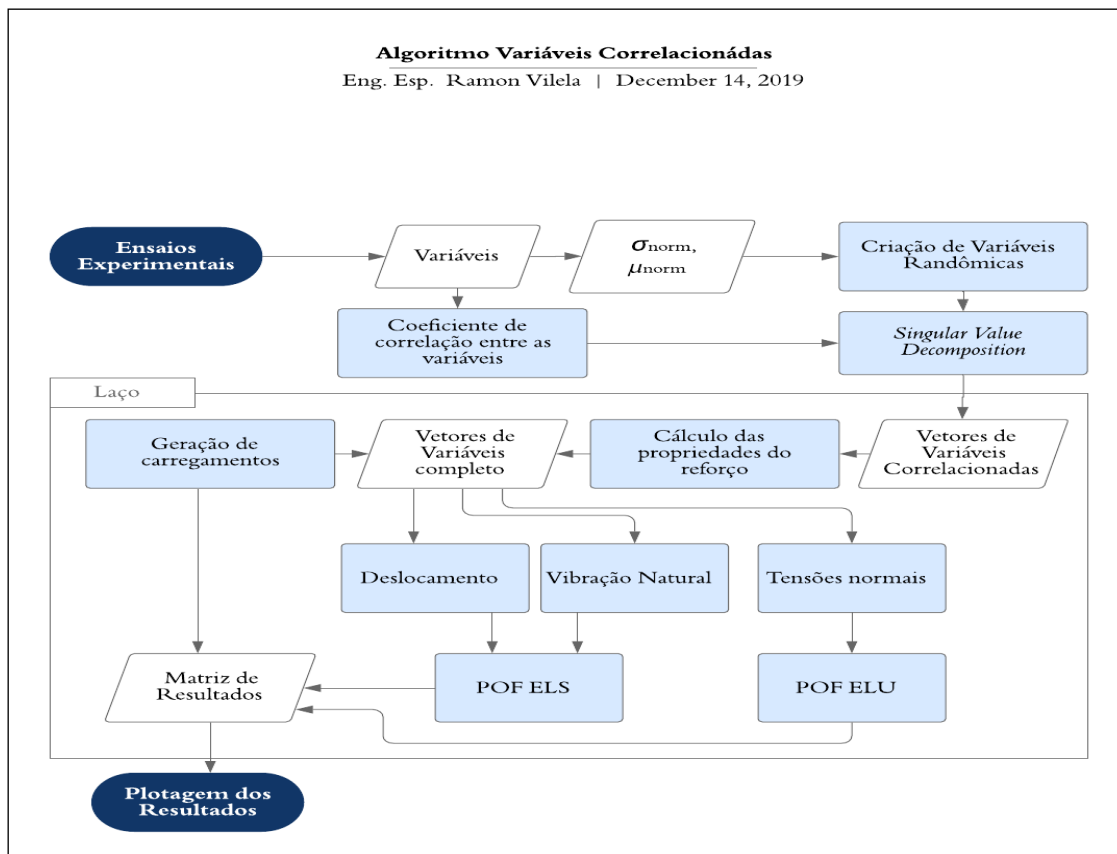
#### 3.2 Simulação de Monte Carlo

Utilizou-se o software Matlab® 2019 para programar a rotina do método Monte Carlo. O processo para análise e comparação dos resultados analíticos e numéricos estão descritos no algoritmo da Figura 2 (página seguinte).

As variáveis obtidas em ensaios experimentais da madeira *Pinus taeda*, da fibra e do adesivo foram utilizadas para estabelecer o desvio padrão e as médias para distribuição normal ( $\sigma_{norm}$  e  $\mu_{norm}$ ), bem como para estabelecer o coeficiente de correlação de *Pearson* entre elas. Variáveis randômicas foram criadas com a mesma média e desvio padrão das propriedades obtidas laboratorialmente. Em seguida, aplicou-se o procedimento de SVD para que os valores gerados tivessem os mesmos coeficientes de correção que os resultados experimentais. Foram gerados vetores com 10.000.006 (dez milhões e seis) de variáveis para cada propriedade física ou mecânica dos materiais envolvidos.

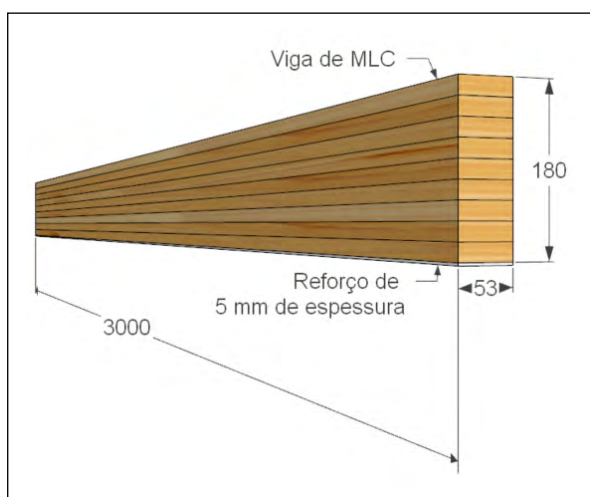
Um laço foi criado para calcular os deslocamentos, vibração natural e tensões para diversas médias de carregamento. Nessa rotina, calculou-se os módulos de elasticidade e resistência conforme as Equações (6) e (7) para cada linha dos vetores de variáveis geradas. Assim, juntamente com o vetor de carregamentos gerados, a partir de uma determinada média e desvio padrão, teve-se um conjunto completo de vetores para calcular os deslocamentos, vibração natural e tensões. Desses últimos, estimou-se a probabilidade de falha para o Estado Limite de Serviço (ELS) e Último (ELU). Essa informação foi armazenada em uma matriz de resultados. Essa rotina foi replicada 100 vezes para os valores médios de carregamento variando de 1,50 kN/m a 5,50 kN/m.

Figura 2 – Algoritmo do processo para a produção dos resultados



Fonte: elaboração própria.

Figura 3 – Geometria da viga de MLC reforçada com fibra sintética, medidas em milímetros



Fonte: elaboração própria.

A viga de MLC foi considerada com todas as lamelas com o mesmo módulo de elasticidade e a mesma geometria, ou seja, a variação de largura

e altura foi a mesma em uma única viga. A altura média da viga de MLC foi de 180 mm, sua largura média foi de 53 mm. O reforço estrutural da fibra sintética foi posicionado abaixo da viga de MLC com uma espessura de 5 mm, conforme apresentado na Figura 3.

Para calcular a flecha no centro do vão, considerou-se um carregamento uniformemente distribuído devido ao peso próprio gerado a partir da densidade e volume dos materiais, e um carregamento acidental, variando conforme o ciclo do laço programado. A flecha foi estimada utilizando-se a Equação (8).

$$w = \frac{5 \cdot (q + g) \cdot \ell^4}{384 \cdot EI} \quad (8)$$

sendo:  $q$  e  $g$  os carregamentos uniformemente distribuídos devido a uma sobrecarga e ao peso próprio, respectivamente;  $\ell$  o comprimento, considerado constante e igual a 3000 mm;  $EI$  a rigidez à flexão, que para a viga sem reforço utilizou-se  $Ebh^3/12$  e para a viga reforçada empregou-se o método da seção transformada, conforme Vilela,

Mascia e Donadon (2019). A falha para esse critério foi estabelecida quando o deslocamento no centro do vão fosse maior que o limite estabelecido, demonstrado pela Equação (9).

$$Falha_{1i} = \begin{cases} 0 \rightarrow w \leq \frac{\ell}{200} \\ 1 \rightarrow w > \frac{\ell}{200} \end{cases} \quad (9)$$

onde,  $Falha_{1i}$  é a  $i$ -ésima linha do vetor de falha devido ao deslocamento excessivo.

A Equação (10) foi utilizada para calcular a frequência natural para o primeiro modo de vibração das vigas e assim avaliar o Estado Limite de Serviço quanto à vibração excessiva.

$$f_{n,1} = \frac{\pi}{2 \cdot \ell^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho \cdot A}} \quad (10)$$

na qual,  $\rho$  é o peso específico do material,  $A$  é a área da seção transversal, sendo que para a viga reforçada considerou-se o peso específico e a área de ambos os materiais.

$$Falha_{2i} = \begin{cases} 0 \rightarrow f_{n,1} \geq 8 \text{ Hz} \\ 1 \rightarrow f_{n,1} < 8 \text{ Hz} \end{cases} \quad (11)$$

onde,  $Falha_{2i}$  é a  $i$ -ésima linha do vetor de falha devido à frequência natural insuficiente.

O momento fletor máximo no meio do vão, calculado conforme a Equação (12), foi utilizado para estimar as máximas tensões normais de tração e compressão nas extremidades inferiores e superiores da viga de madeira, respectivamente, utilizando-se as Equações (13) e (14).

$$M_{m\acute{a}x} = \frac{(q + g) \cdot \ell^2}{8} \quad (12)$$

$$\sigma_{M,t} = E_M \frac{M_{m\acute{a}x}}{EI} y_{inf} \quad (13)$$

$$\sigma_{M,c} = E_M \frac{M_{m\acute{a}x}}{EI} y_{sup} \quad (14)$$

sendo,  $E_M$  o módulo de elasticidade da madeira,  $y_{inf}$  e  $y_{sup}$  as distâncias do centro de gravidade até a fibra mais tracionada e a mais comprimida.

A falha quanto à tração e flexão na madeira foram computadas em vetores com os critérios apresentados nas Equações (15) e (16).

$$Falha_{3i} = \begin{cases} 0 \rightarrow \sigma_{M,t} \leq f_M \\ 1 \rightarrow \sigma_{M,t} > f_M \end{cases} \quad (15)$$

$$Falha_{4i} = \begin{cases} 0 \rightarrow \sigma_{M,c} \leq f_M \\ 1 \rightarrow \sigma_{M,c} > f_M \end{cases} \quad (16)$$

onde,  $Falha_{3i}$  e  $Falha_{4i}$  são os componentes da  $i$ -ésima linha dos vetores de falha devido à tração e compressão excessivas na madeira, respectivamente,  $f_M$  é a resistência à flexão da madeira.

A máxima tensão de tração no reforço foi estimada a partir do momento máximo ao centro do vão da viga, conforme a Equação (17).

$$\sigma_{r,t} = E_r \frac{M_{m\acute{a}x}}{EI} y_r \quad (17)$$

sendo,  $E_r$  o módulo de elasticidade do reforço,  $y_r$  a distância do centro de gravidade da viga reforçada até o centro de gravidade do reforço.

A falha quanto à tração excessiva no reforço foi estabelecida com a condição demonstrada na Equação (18).

$$Falha_{5i} = \begin{cases} 0 \rightarrow \sigma_{r,t} \leq f_r \\ 1 \rightarrow \sigma_{r,t} > f_r \end{cases} \quad (18)$$

onde,  $Falha_{5i}$  é o componente da  $i$ -ésima linha do vetor de falha devido à tração excessiva no reforço,  $f_r$  é a resistência à tração do reforço.

A probabilidade de falha quanto ao Estado Limite de Serviço foi calculada a partir da combinação das situações de falha estocadas nos vetores  $Falha_1$  e  $Falha_2$ , sendo a soma destas combinações dividida pela quantidade de situações simuladas. Analogamente, estimou-se a probabilidade de falha para o Estado Limite Último pela combinação dos vetores  $Falha_3$ ,  $Falha_4$  e  $Falha_5$ . A combinação de falha desconsidera os acúmulos de falhas em uma mesma situação.

As variáveis utilizadas para a geração de valores estocásticos quanto aos materiais empregados neste estudo estão denotadas na Tabela 2.



Tabela 2 – Propriedades físicas e mecânicas reduzidas para situação de projeto

Material	Propriedades	Sigla	Média	$s_d$	CV
Madeira	Módulo de elasticidade à flexão (MPa)		14.029,19	2.577,93	0,184
	Resistência à flexão (MPa)		78,24	12,82	0,164
	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )		591,52	45,17	0,076
	Umidade (%)		12,55	0,98	0,078
	Dimensão $R$ (mm)		53,00	0,17	0,003
	Dimensão $T$ (mm)		180,00	0,17	0,001
Fibra	Módulo de elasticidade (MPa)		58.346,00	2.057,70	0,035
	Resistência à tração (MPa)		260,00	9,50	0,037
	Volume específico (m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> )		0,51	0,03	0,052
	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )		1.400,00	69,99	0,050
Adesivo	Módulo de elasticidade (MPa)		3.250,00	180,00	0,055
	Resistência à tração (MPa)		42,56	1,59	0,037
	Volume específico (m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> )		0,45	0,03	0,059
	Densidade (kg/m <sup>3</sup> )		1.280,00	64,02	0,050
Vazios	Volume específico (m <sup>3</sup> /m <sup>3</sup> )		0,05	0,01	0,100

sd = desvio padrão; CV = coeficiente de variação.

Fonte: dados da pesquisa

A distribuição de probabilidade considerada para todas as variáveis foi a Gaussiana. Porém, utilizou-se um laço para aumentar gradativamente o a média do carregamento uniformemente distribuído sobre a viga reforçada, a fim de que fossem coletadas probabilidades de falha para o ELU e ELS em função do incremento de carregamentos médios. O coeficiente de variação para o carregamento foi mantido o mesmo, valendo 10% para todos os incrementos, levando-se em consideração que o desvio padrão aumenta proporcionalmente à intensidade média dos carregamentos acidentais.

As correlações entre as variáveis da madeira foram consideradas as mesmas obtidas experimentalmente. As variáveis do adesivo e da fibra não foram correlacionadas. A Tabela 3 apresenta a correlação entre as variáveis correlacionáveis utilizada na rotina de cálculo.

Tabela 3 – Matriz de correlação entre as variáveis correlacionáveis

Var.	$E_M$	$f_M$	$d_M$	$U_M$	$b$
$MLCE_M$	1,00	0,80	0,77	-0,43	-0,02
$f_M$	0,80	1,00	0,71	-0,38	0,04
$d_M$	0,77	0,71	1,00	-0,13	0,09
$U_M$	-0,43	-0,38	-0,13	1,00	0,68
$b$	-0,02	0,04	0,09	0,68	1,00

$E_M$  = módulo de elasticidade da madeira;  $f_M$  = resistência da madeira;  $d_M$  = densidade da madeira;  $U_M$  = umidade da madeira;  $b$  = largura.

Fonte: dados da pesquisa

### 3.3 Simulação estrutural pelo método dos Elementos Finitos

Para a simulação da situação de uma viga em condição de projeto (viga com dimensões conforme a Figura 3), foi utilizado o recurso de análise numérica através do software comercial ANSYS WORKBENCH versão 19.0 com seu pacote “*Static Structure*”, para avaliação das tensões e deslocamentos, e o pacote “*modal*”, para a análise da frequência natural de vibração.

A viga simulada numericamente teve suas propriedades mecânicas de módulo de elasticidade e resistência em função de quatro origens distintas que podem ser aplicadas. Os quatro cenários foram configurados da seguinte maneira:

- i. No primeiro cenário foram considerados as propriedades mecânicas de resistência e o módulo de elasticidade obtidos de ensaios à flexão de *Pinus taeda*, publicados em Vilela (2020);
- ii. No segundo cenário foram utilizados os dados de classe de conífera C50 da proposta de norma apresentada para substituição da NBR 7190 (ABNT, 1997);
- iii. No terceiro cenário também se considerou a tabela de classe, porém da norma vigente NBR 7190 (ABNT, 1997) e para a classe de conífera C30;
- iv. Para a quarta e última situação foram utilizados os dados da tabela de espécies no Anexo E da norma vigente NBR 7190 (ABNT, 1997), sendo a espécie *Pinus taeda L.*

Os valores das propriedades mecânicas utilizadas para cada situação de simulação numérica estão descritos na Tabela 4.

Como condições de contorno das simulações numéricas foi considerado um carregamento teórico sobre a superfície da viga, com valores variando de 7 kN a 26 kN em 10 etapas, um apoio fixo em uma extremidade da viga, um apoio móvel na outra (Figura 4) e a região de contato das fibras com a viga foi imposta como colada, ou seja, não havendo deslizamento entre as superfícies.

As propriedades mecânicas utilizadas nas simulações numéricas (Tabela 4) foram obtidas através de quatro situações impostas, porém em

todas as situações os valores utilizados foram aqueles de situação de projeto, ou seja, com seus valores minorados através de coeficientes de segurança.

**Tabela 4** – Propriedades mecânicas reduzidas para situação de projeto

Propriedade	Ensaio NBR atual <sup>1</sup>	Classe NBR proposta <sup>2</sup>	Classe NBR atual <sup>2</sup>	Espécie NBR atual <sup>2</sup>
$f_{wM,k}$ (MPa)	57,1	29,0	30,0	31,1
$f_{wM,d}$ (MPa)	22,8	11,6	12,0	12,4
$E_{wM,d}$ (MPa)	7.856	8.960	8.120	7.450
$\rho$ (kg/m <sup>3</sup> )	597	550	600	645

1 Propriedades na flexão.

2 Propriedades na compressão.

Fonte: dados da pesquisa

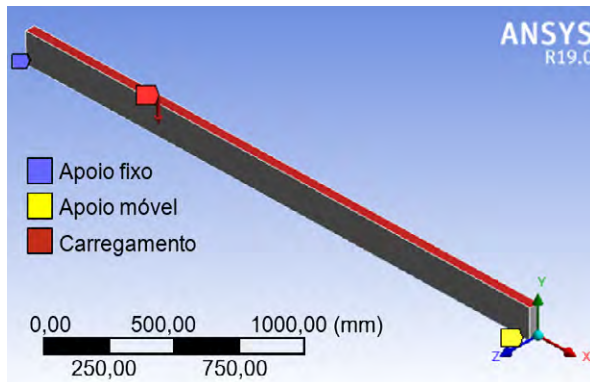
Na Tabela 4 os valores de resistência à flexão de projeto foram estabelecidos a partir dos valores característicos das propriedades da madeira multiplicados pelo fator de correção  $k_{mod} = 0,56$  e divididos pelo coeficiente de ponderação  $Y_M = 1,4$ . Quanto aos módulos de elasticidade de projeto, esses foram calculados pelo produto entre o módulo de elasticidade médio e o fator de correção  $k_{mod} = 0,56$ .

Cabe enfatizar a diferença do valor de resistência obtido pelo ensaio experimental e aqueles informados pelas classes de resistência ou espécie segundo a NBR 7190 (ABNT, 1997). Um dos principais motivos é que os critérios para análise de flexão sugeridos pela norma para os cenários *ii* a *iv* são estabelecidos pelas propriedades obtidas à compressão, que foi respeitada neste trabalho. Em contrapartida, entende-se que os resultados demandados de ensaios à flexão são diretamente indicativos para a análise que está sendo realizada (na flexão), por isso, esses foram escolhidos para a condução desta pesquisa.

Como condições estruturais foram aplicados os carregamentos sobre a superfície superior da viga, um apoio fixo em uma extremidade da viga e um apoio móvel na outra (Figura 4).



**Figura 4** – Condições de contorno estrutural impostas para simulação



Fonte: dados da pesquisa

Foram utilizados elementos do tipo SOLID186 para discretizar a viga de madeira e elementos do tipo SHELL181 para discretizar o reforço de fibra, a interface de contato foi realizada com os elementos Conta174, TARGE170 e SURF154, todos escolhidos pela otimização do programa, porém utilizados em simulações da literatura (DONADON *et al.*, 2020; RIBEIRO; MASCIA, 2019).

O critério de escolha do tamanho da malha, bem como a validação de sua convergência, foi realizado utilizando o método mais usado na literatura científica para quantificar as incertezas da discretização, o método do índice de convergência de malha, do inglês *Grid Convergence Index* (GCI), (BECT *et al.*, 2021; RIBEIRO e MASCIA, 2019). A malha final utilizada utilizou razão entre objeto elemento de 0,5 para a viga de madeira e 0,25 para o reforço de fibra, sendo elementos sólidos de dimensão máxima 29 mm para a viga e elemento de casca com dimensão máxima de 15 mm.

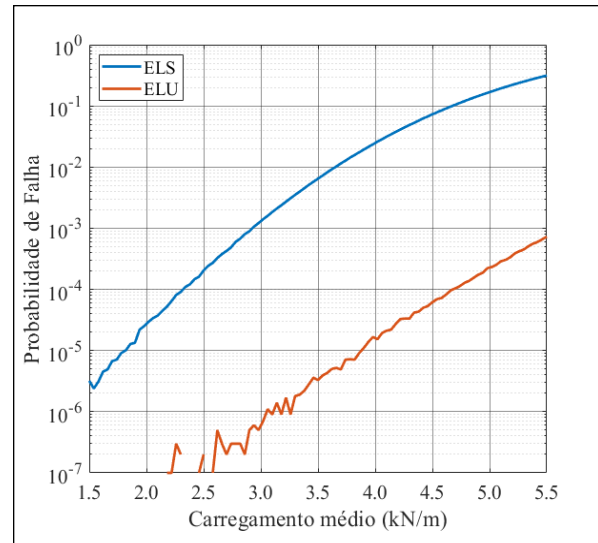
## 4 Resultados e discussões

As maiores probabilidades de falha dentre os critérios para Estado Limite de Serviço (deslocamento e vibração excessiva) e Estado Limite Último (máximas tensões de compressão e tração na madeira e na fibra) estão apresentadas na Figura 5.

Na Figura 5 é notado que a probabilidade de falha para o ELS varia entre  $2,6 \cdot 10^{-6}$  e  $3,1 \cdot 10^{-1}$ . No entanto, para o ELU, a probabilidade de falha foi menor ou igual  $7,1 \cdot 10^{-4}$ . Os valores de probabilidade inicial para carregamentos médios menores que 3 kN/m não tiveram uma precisão capaz de ser representativa. Observa-se que a curva de probabilidade de falha é

correlacionada positivamente com o incremento de sobrecarga média para ambos os estados limites. Além disso, quanto mais distante a probabilidade de falha do número de combinações, mais suave tende a ser a curva.

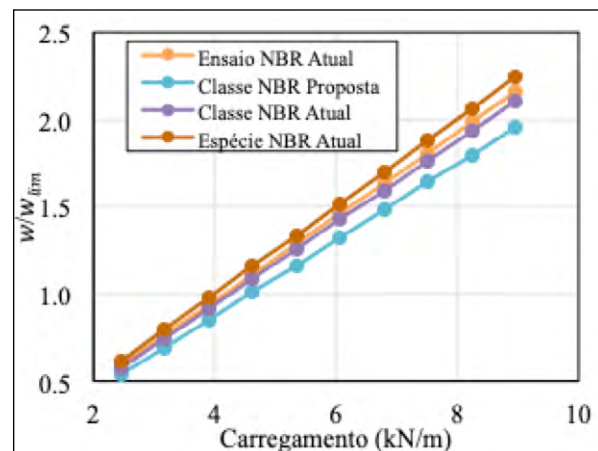
**Figura 5** – Probabilidade de falha para o ELS em função da média de carregamento de sobrecarga



Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 6 são apresentados os resultados de fatores de utilização para deslocamentos, sendo estabelecido  $FU = w/w_{lim}$ . Nessa figura é possível identificar que a simulação segundo a proposta da NBR 7190 (ABNT, 1997) foi a que gerou menores fatores de utilização, contrapondo os resultados obtidos pela espécie no Anexo E da norma atual de estruturas de madeira. Em geral, todas as simulações tiveram valores próximos quanto aos deslocamentos.

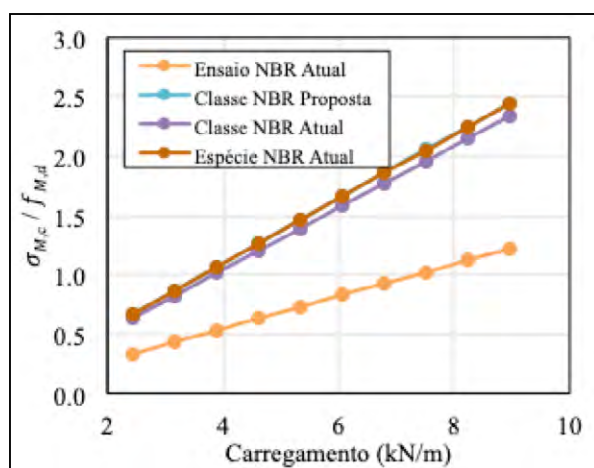
**Figura 6** – Fator de utilização para deslocamentos



Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 7 são exibidos os resultados de fatores de utilização provenientes da compressão no topo da viga de madeira quanto ao Estado Limite Último. Nesse gráfico, o fator de utilização foi calculado como sendo  $FU = \sigma_{M,c} / f_{M,d}$ . Desse resultados, observa-se que a simulação a partir das propriedades da norma atual produziram fatores de utilização quanto à compressão significativamente menores do que os demais cenários, sendo que esses tiveram valores relativamente similares.

**Figura 7** – Fator de utilização para compressão na madeira

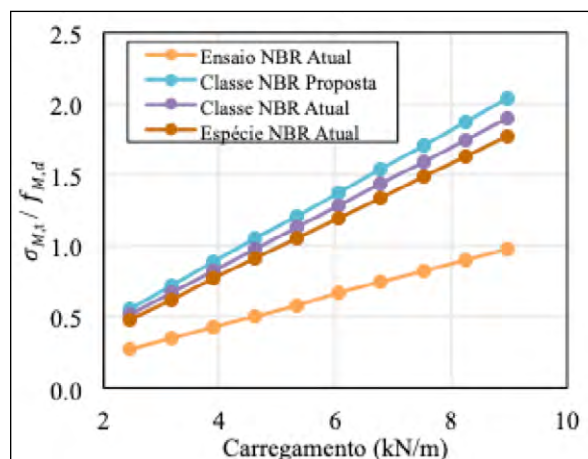


Fonte: dados da pesquisa

Na Figura 8 observam-se os resultados de fatores de utilização oriundos da tração na face inferior da viga de madeira referente ao estado limite último. Para esses resultados, o fator de utilização foi calculado como sendo  $FU = \sigma_{M,t} / f_{M,d}$ . Nessa figura identifica-se o cenário simulado com as propriedades da norma atual como sendo aquele que gerou os menores fatores de utilização.

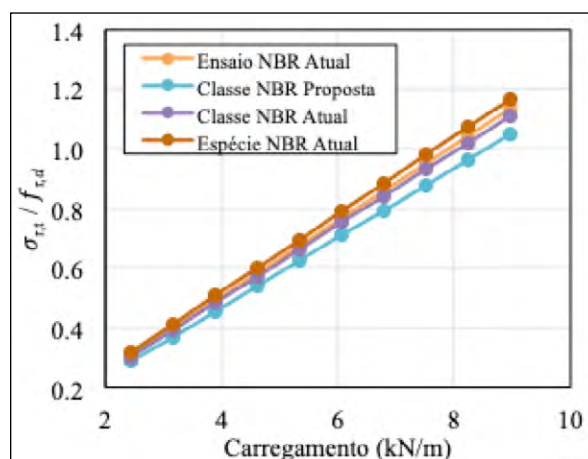
Os resultados de tração no reforço de fibra sintética referentes ao ELU estão apresentados na Figura 9. Nessa figura, o fator de utilização foi estabelecido como sendo  $FU = \sigma_{r,t} / f_{r,d}$ . Também é possível verificar que a simulação realizada com as propriedades segundo a norma proposta destaca-se como sendo aquela que acarretou os menores fatores de utilização. Por outro lado, a composição simulada a partir do Anexo E da norma atual teve os maiores fatores de utilização.

**Figura 8** – Fator de utilização para tração na madeira



Fonte: dados da pesquisa

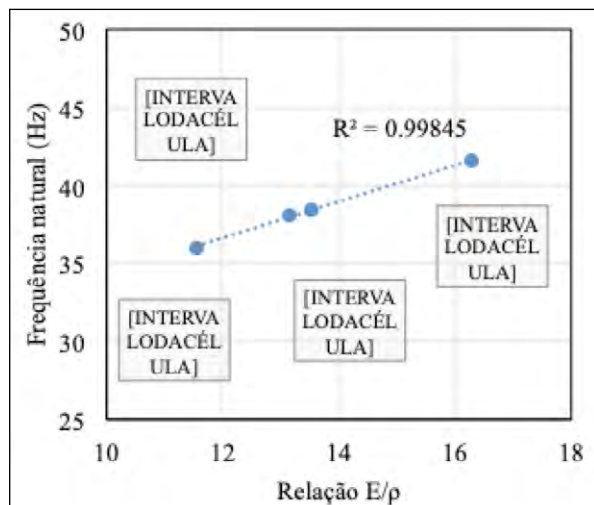
**Figura 9** – Fator de utilização para tração no reforço



Fonte: dados da pesquisa

A Figura 10 foi elaborada com base nos resultados da simulação numérica da frequência natural de vibração das vigas reforçadas. Nessa figura é possível notar que a simulação pelas propriedades da classe da norma proposta (*i.e.*, rigidez e densidade) estabeleceram um melhor desempenho quanto à vibração, resultando no maior valor de frequência natural. A composição que apresentou menor frequência natural foi aquela computada a partir da espécie da atual norma.

Figura 10 – Frequência natural das vigas com reforço



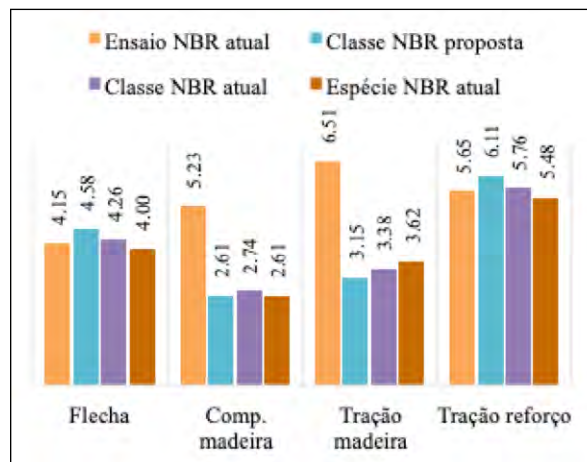
Fonte: dados da pesquisa

No eixo das abscissas da Figura 10 está a relação entre módulo de elasticidade [ $E_{wM,d}$  (MPa)] e densidade utilizadas na simulação [ $\rho$  (kg/m<sup>3</sup>)], conforme Tabela 4. Com isso, foi possível identificar a forte correlação entre a frequência natural e a relação  $E/\rho$ , com valor de  $R^2 = 0,9984$ .

Na Figura 11 estão apresentados os resultados de carregamentos uniformemente distribuídos para as diversas simulações numéricas realizadas neste estudo para o fator de utilização igual a 1, sendo que os carregamentos no ELS foram divididos pelo coeficiente de ponderação  $\gamma_f = 1,4$ . Nessa figura identifica-se que, em geral, os critérios de ELU quanto à compressão e à tração na madeira são os limitantes para o dimensionamento da viga de MLC reforçada. Mais especificamente, a compressão na madeira para as simulações com as propriedades da norma proposta e de espécie no Anexo E tiveram o menor dos carregamentos limitantes,  $q_d = 2,61$  kN/m.

A análise dos dados numéricos indica que para uma situação de viga MLC com reforço, o limitante do dimensionamento seria o ELU da compressão nas fibras da madeira com o dimensionamento através das classes para a norma atual vigente e ELU de tração na madeira para a proposta de norma. Porém, deve-se ficar atento ao ELS de deslocamento excessivo, pois seu fator de utilização encontra-se próximo dos obtidos no ELU. Já os ELU de tração na fibra do reforço e ELS de vibração excessiva apresentaram valores distantes de uma ruptura, não sendo considerados limitantes para o dimensionamento para os carregamentos considerados.

Figura 11 – Carregamentos uniformemente distribuídos para  $q_d$ , em kN/m



Fonte: dados da pesquisa

A análise comparativa dos máximos carregamentos aceitáveis entre os cenários simulados em Elementos Finitos e o método de Monte Carlo pode ser visualizada na Tabela 5.

Tabela 5 – Comparação entre carregamentos obtidos pelo MEF e Monte Carlo

Método	ELS		ELU	
	Carreg.	Dif.	Carreg.	Dif.
	(kN/m)		(kN/m)	
Ensaio NBR Atual	4,15	22%	5,23	49%
Classe NBR Proposta	4,58	35%	2,61	-25%
Classe NBR Atual	4,26	25%	2,74	-22%
Espécie NBR Atual	4,00	18%	2,61	-25%
Monte Carlo	3,40	—	3,50	—

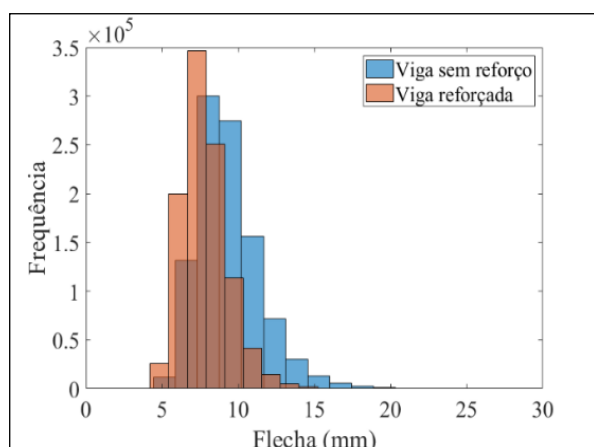
Fonte: dados da pesquisa

Para o ELS, a probabilidade de falha ficou em  $6,4 \cdot 10^{-2}$  em um carregamento estimado de 3,4 kN/m. Os carregamentos limites (pelo fator de utilização) para os quatro modelos propostos pela norma vigente ou proposta mostraram-se maiores quando comparados ao carregamento estabelecido pelo método de Monte Carlo.

Para o ELU, o carregamento de 3,5 kN/m foi estabelecido como limite em função da  $P_f = 6,4 \cdot 10^{-5}$ . Dos resultados obtidos pelos modelos normativos, o único que permitiu carregamentos maiores que o método de Monte Carlo foi o “Ensaio NBR atual” (5,23 kN/m).

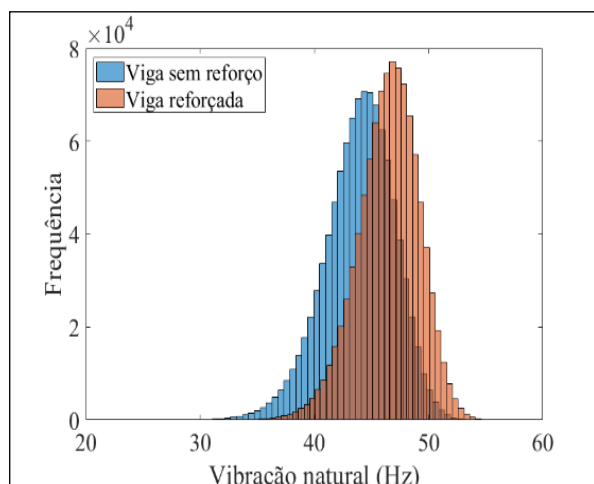
A partir dos resultados obtidos pela simulação de Monte Carlo para o carregamento médio de 3 kN/m e desvio padrão de 0,3 kN/m, foram gerados histogramas de distribuição de frequência quanto aos deslocamentos (Figura 12), frequência de vibração natural (Figura 13), compressão normal máxima devido à flexão no topo da viga (Figura 14) e tração normal máxima devido à flexão na face inferior da viga de MLC (Figura 15).

**Figura 12** – Distribuição de frequência de deslocamentos para viga com e sem reforço estrutural



Fonte: dados da pesquisa

**Figura 13** – Distribuição de frequência de resultados de frequência natural para viga com e sem reforço estrutural



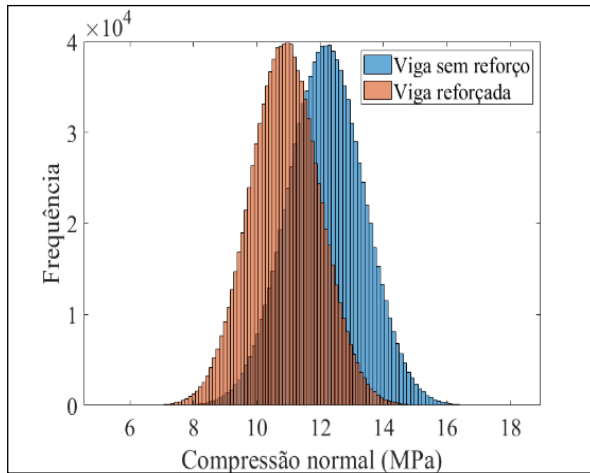
Fonte: dados da pesquisa

A média dos deslocamentos para a viga sem reforço foi de  $\mu_s = 9,38$  mm com um coeficiente de variação de  $CV_s = 27,60\%$ . Para a viga reforçada, a média da flecha foi estimada em  $\mu_r = 7,84$  mm com um coeficiente de variação de  $CV_r = 20,25\%$ . Identifica-se que a intervenção com reforço reduziu os deslocamentos em 16,4% com relação à média. A variância dos resultados também foi menor para a viga reforçada, quando comparada àquela sem reforço, em 26,6%.

Na Figura 13 estão apresentados os resultados de distribuição de frequência para os valores de frequência de vibração encontrados para vigas com e sem reforço estrutural. Nessa figura, a média da frequência natural estabeleceu-se em  $\mu_s = 43,95$  Hz para viga sem reforço com um coeficiente de variação de  $CV_s = 6,95\%$ . Para a viga reforçada, obtiveram-se os valores de média  $\mu_r = 46,48$  Hz e coeficiente de variação de  $CV_r = 5,76\%$ . A aplicação do reforço ocasionou um aumento na frequência natural em 5,8% e uma redução de 17,1% na variância da estrutura, ambos resultados significam melhora para o composto.

A Figura 14 é uma representação gráfica da distribuição de frequência dos resultados de compressão normal máxima na madeira com e sem reforço estrutural. A média dos valores de compressão para a viga sem reforço foi de  $\mu_s = 12,18$  MPa com um coeficiente de variação de  $CV_s = 9,83\%$ . Por outro lado, temos para a viga reforçada uma média de compressão de  $\mu_r = 10,88$  MPa e um coeficiente de variação de  $CV_r = 10,08\%$ . Assim, calcula-se uma redução de 10,7% na média de compressão no topo da madeira, porém, um aumento de 2,5% do coeficiente de variação ao inserir o reforço estrutural na viga. Em geral, tais resultados demonstram um aumento significativo na capacidade de resistência da madeira quanto à compressão.

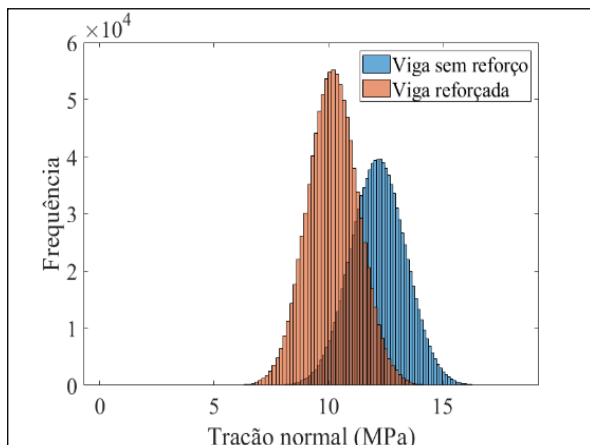
**Figura 14** – Distribuição de frequência de compressão na flexão para viga com e sem reforço estrutural



Fonte: dados da pesquisa

A Figura 15 é composta pelo gráfico de distribuição de frequência dos resultados de tração normal devido à flexão na madeira para as vigas configuradas com e sem o reforço de fibra sintética. A média dos resultados de tração para a viga sem o reforço foi de  $\mu_s = 12,18$  MPa e seu coeficiente de variação estabeleceu-se em  $CV_s = 9,83\%$ . Para a viga reforçada, tem-se uma média de tração de  $\mu_r = 10,21$  MPa com um coeficiente de variação de  $CV_r = 10,84\%$ . Comparando os valores médios, a tração na madeira foi reduzida em 16,2%, enquanto houve um aumento do coeficiente de variação em 10,3% após a inserção do reforço estrutural.

**Figura 15** – Distribuição de frequência de tração na flexão para viga com e sem reforço estrutural



Fonte: dados da pesquisa

## 5 Conclusões

O reforço de vigas de MLC produziu menores médias e coeficiente de variação de flechas em comparação às avaliadas sem reforço. A frequência natural também se mostrou mais favorável quando a viga foi reforçada, tanto em média quanto em coeficiente de variação após o reforço. No entanto, para a compressão e tração normal devido à flexão, as respectivas médias tiveram considerável redução, porém, o coeficiente de variação aumentou sutilmente. Em geral, o reforço por composto de fibra sintética evidenciou um desempenho estrutural da viga de MLC significativamente melhor.

Quanto ao ELU, os carregamentos limites simulados com as propriedades de resistência e rigidez à compressão da madeira mostraram-se mais conservadores do que os resultados de carregamentos limites estabelecidos a partir dos ensaios de flexão. O carregamento estabelecido pelo método de Monte Carlo para o ELU ficou abaixo daquele estabelecido pelo cenário de propriedades ensaiadas.

Para ELS, o método de Monte Carlo resultou em um valor de carregamento limite abaixo daqueles calculados pelos modelos numéricos, demonstrando-se mais conservador.

As diferenças entre os métodos ficaram entre 18 e 49%. Dadas as incertezas da madeira, das possibilidades de cálculo e os elevados coeficientes de ponderação das propriedades e carregamentos que envolvem a análise estrutural da madeira, tais diferenças podem ser aceitáveis.

Com o avanço da capacidade de processamento de computadores domésticos e da difusão do conhecimento de técnicas de simulação estocásticas, a aplicação da confiabilidade associada com métodos numéricos em estruturas tende a crescer para atender problemas mais complexos que os modelos matemáticos analíticos, os quais exigiriam um trabalho considerável para serem solucionados. No presente trabalho, demonstrou-se que os métodos de Monte Carlo e de Elementos Finitos podem ser aplicados a problemas estruturais. Além disso, apesar de que neste estudo ambos os métodos separadamente tenham sido aplicados, é possível associá-los para se empregar modelos de maior complexidade geométrica, física e mecânica, além da variação de tais propriedades.

É pertinente ressaltar a avaliação da curva de distribuição das variáveis do problema, bem como as correlações de tais variáveis, caso existam. Desse



modo, auferem-se maior fidelidade às variáveis geradas computacionalmente e empregadas para se estimar a probabilidade de falha do sistema estrutural.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pela concessão de bolsa de estudos.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, A. F. **Projeto ótimo baseado em confiabilidade de pórticos planos de concreto armado**. 2008. Tese (Doutorado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2008.

ABNT. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS, Rio de Janeiro. **NBR 7190 - Projeto de estruturas de madeira**. Rio de Janeiro, 1997.

BARBOSA, A. H.; FREITAS, M. S. da R.; NEVES, F. A. Confiabilidade estrutural utilizando o método de Monte Carlo e redes neurais. **Revista Escola de Minas**, v. 58, n. 3, p. 247–255, set. 2005.

BECT, J. *et al.* On the quantification of discretization uncertainty: comparison of two paradigms. In: WORLD CONGRESS ON COMPUTATIONAL MECHANICS, 14., 2021, Paris. **Proceedings...** Paris: IACM, 2021.

BERTOLINE, C. A. A. *et al.* Analysis of fiber reinforced laminated timber beams. **Key Engineering Materials**, v. 668, p. 100–109, 2016.

DEFILTRO, V. F.; GOMES, W. J. S. Análise de Confiabilidade Estrutural de Problemas Baseados na Mecânica dos Sólidos. **Revista Eletrônica de Engenharia Civil**, v. 12, n. 2, 4 jul. 2016.

DONADON, B. F. *et al.* Experimental investigation of glued-laminated timber beams with Vectran-FRP reinforcement. **Engineering Structures**, v. 202, p. 109818, jan. 2020.

FIORELLI, J.; DIAS, A. A. Glulam beams reinforced with FRP externally-bonded: theoretical and experimental evaluation. **Materials and Structures**, v. 44, p. 1431–1440, 2011.

GLIŠOVIĆ, I. *et al.* Numerical Analysis of Glulam Beams Reinforced with CFRP plates. **Journal of Civil**

**Engineering and Management**, v. 23, n. 7, p. 868–879, 2017.

HERNANDEZ, R. *et al.* **Strength and stiffness of reinforced Yellow-Poplar glued-laminated beams**. Madison: Department of Agriculture, Forest Service, Forest Products Laboratory, 1997.

LEGCHENKO, A. *et al.* Joint use of singular value decomposition and Monte-Carlo simulation for estimating uncertainty in surface NMR inversion. **Journal of Applied Geophysics**, v. 144, p. 28–36, set. 2017.

MASCIA, N. T. *et al.* Numerical analysis of glued laminated timber beams reinforced by Vectran fibers. **Ambiente Construído**, v. 18, n. 3, p. 359–373, set. 2018.

MASCIA, N. T.; DONADON, B. F.; VILELA, R. Glued laminated timber beams reinforced with sisal fibres. **International Journal of Structural and Civil Engineering Research**, v. 8, p. 390–397, 2019.

NOWAK, A. S.; COLLINS, K. R. **Reability of structures**. Boston: McGraw-Hill, 2000.

RAFTERY, G. M.; HARTE, A. M. Low-grade glued laminated timber reinforced with FRP plate. **Composites Part B Engineering**, v. 42, n. 4, p. 724–735, 2011.

RIBEIRO, A. B.; MASCIA, N. T. Numerical and experimental study of shear stress behavior of NBR and ASTM standard test specimens for FRP-wood bonds. **Composite Structures**, v. 224, p. 111066, set. 2019.

SOLAROV, R.; GLISIC, M. Glulam beams reinforced with FRP strips and their application in architecture. **Spatium**, n. 32, p. 1–6, 2014.

SOUKHER, N. *et al.* Monte Carlo simulations in the case of several risk factors: Cholesky decomposition and copulas. **International Journal of Computer Science Issues**, v. 11, n. 2, p. 233–237, 2014.

VILELA, R. **Desempenho estrutural de placas de cross laminated timber submetidas à flexão**. 2020. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2020.

VILELA, R.; MASCIA, N. T.; DONADON, B. F. Avaliação numérica e experimental de vigas de madeira lamelada colada reforçada com fibras de



vecfran. In: CONGRESO LATINOAMERICANO DE  
ESTRUCTURAS DE MADERAS, 4., 2019, Montevideo.  
**Anais...** Montevideo: Universidad de la Republica  
Uruguay, 2019.