

Controlador adaptativo MRAC em um pêndulo amortecido baseado em modelos matemáticos determinísticos

Brunna Santana de Vasconcellos ^[1], Marcelo da Silva Pinheiro ^[2], Fábio Meneghetti Ugulino de Araújo ^[3], Ademar Gonçalves da Costa Junior ^[4]

[1] brunna.vasconcellos.ee@gmail.com. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), Campus Paulo Afonso.

[2] pinheiro84@yahoo.com.br. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) Campus João Pessoa, Laboratório de Instrumentação, Sistemas de Controle e Automação (LINSICA).

[3] meneghet@dca.ufrn.br. Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN), Departamento de Engenharia de Computação e Automação (DCA).

[4] ademar.costa@ifpb.edu.br. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB) Campus João Pessoa, Laboratório de Instrumentação, Sistemas de Controle e Automação (LINSICA).

RESUMO

Os sistemas de controle automático têm grande importância no progresso da Engenharia e da Tecnologia. O controle adaptativo tem a capacidade de modificar seus parâmetros, quando necessário, para diminuir o erro do sistema. Este artigo mostra a aplicação de controle MRAC (*Model Reference Adaptive Controller*) utilizando a regra MIT, em um pêndulo amortecido, que possui um motor CC com hélice acoplada, como parâmetro de entrada, e o ângulo medido por um acelerômetro, como parâmetro de saída, caracterizando um sistema monovariável. O modelo de referência foi baseado na resposta da curva de saída, utilizando-se os métodos de Mollenkamp e de Smith, considerados métodos determinísticos na área de identificação. Primeiramente, o sistema de controle adaptativo projetado foi simulado com auxílio do Matlab/Simulink, depois os testes experimentais foram realizados no pêndulo amortecido desenvolvido, com resultados experimentais obtidos a partir de uma plataforma de prototipagem Arduino como sistema de aquisição de dados. Os resultados mostram o comportamento do MRAC, cujos parâmetros foram ajustados para obter o comportamento dinâmico o mais próximo possível de um modelo de referência previamente selecionado.

Palavras-chave: Controle adaptativo. Método de Mollenkamp. Método de Smith. MRAC. Pêndulo amortecido.

ABSTRACT

The automatic control systems have great importance in the progress of engineering and technology. Adaptive control has the ability to modify its parameters when it is necessary to decrease the system error. This paper shows an application of an MRAC (Model Reference Adaptive Controller) using the MIT rule, through a damped pendulum, that has a CC motor with an attached propeller, as input parameter and the angle captured by an accelerometer as an output parameter in the SISO (Single Input Single Output) system. The reference model was based on the response of the output curve using the methods of Mollenkamp and Smith, considered deterministic methods in the area of system identification. Firstly, the designed adaptive control system was simulated using Matlab/Simulink, then the experimental tests were performed in the built dynamical system, with experimental results using an Arduino prototyping platform as a data acquisition system. The results show the MRAC behavior, whose parameters were tuned to obtain the dynamic behavior as close as possible a previously selected reference model stated.

Keywords: Adaptive control, Mollenkamp method, Smith method, MRAC, damped pendulum.

1 Introdução

Os sistemas de controle são essenciais em diversos sistemas dinâmicos para o controle de variáveis como, por exemplo, a pressão, a temperatura, a umidade, entre outras. Quando se utiliza um controlador para que um sistema dinâmico opere em um determinado ponto de operação, alguns problemas podem acontecer, como a má sintonia dos parâmetros do controlador e ou variações paramétricas ao longo do tempo durante o funcionamento do sistema. Com isso, o uso de técnicas de controle para sistemas não lineares, como o controle adaptativo, é motivado e passa a ser atraente.

Com o objetivo de utilizar técnicas de controle adaptativo em um protótipo educacional, um sistema mecânico denominado pêndulo físico amortecido (denomina-se pêndulo amortecido no restante do texto) foi elaborado e utilizado, sendo um exemplo de um sistema dinâmico não linear.

Em trabalhos sobre esse tipo de sistema dinâmico, Knihš *et al.* (2010) avaliaram a utilização de um controlador adaptativo autoajustável digital para a estabilização da posição angular. Lemes, Silveira e Coelho (2010) utilizaram um pseudocontrolador PID com ajuste dos parâmetros por meio de regras *fuzzy* para alguns sistemas dinâmicos, entre eles, um pêndulo amortecido. Kizmaz, Aksoy e Muhurcu (2010) aplicaram um algoritmo básico do *Sliding Model Control* (SMC) para o controle da posição angular de um pêndulo amortecido. Em Enikov e Campa (2012), o desenvolvimento de um pêndulo amortecido em atividades educacionais, envolvendo conceitos de controladores lineares e não-lineares, por meio do Matlab/Simulink, é apresentado. Ghasemi e Khoiyani (2014) utilizaram um controlador adaptativo neural direto, baseado em funções de base radial (RBF – *Radial Basis Function*).

Continuando a análise dos trabalhos, Farooq *et al.* (2015) obtiveram resultados simulados decorrentes da aplicação do projeto de um regulador realimentado na saída, por meio de técnicas LMI (*Linear Matrix Inequality*) em um observador *fuzzy* Takagi-Sugeno (TS), aplicados a um pêndulo amortecido. Também é apresentado, por Job e Jose (2015), um pêndulo amortecido para comparar o projeto de controladores PID, LQR e PID baseado em LQR, por meio de um modelo matemático fenomenológico. Em Habib *et al.* (2017), um modelo matemático linearizado, baseado nas equações fenomenológicas e na análise de

estabilidade, é estudado e aplicado ao projeto de um controlador digital PD para um pêndulo amortecido.

Neste trabalho, um controlador adaptativo baseado em modelo de referência, por função de transferência, é utilizado para o controle de posição em um pêndulo amortecido, que é representado como um sistema monovariável (*Single Input Single Output* – SISO). As funções de transferência que representam a dinâmica do sistema em um determinado ponto de operação são identificadas por meio de experimentos, em específico usando as técnicas lineares determinísticas de Smith e de Mollenkamp para sistemas de segunda ordem. Dessa forma, os parâmetros do controlador adaptativo são ajustados por meio da regra do MIT, com resultados experimentais apresentados para uma possível validação.

O restante deste artigo é organizado da seguinte maneira: na seção 2, são apresentados os principais fundamentos teóricos do controle adaptativo por modelo de referência e a modelagem do pêndulo amortecido; na seção 3, é apresentada uma descrição do sistema do pêndulo amortecido que foi construído e utilizado para os testes; na seção 4, são apresentados os resultados simulados e experimentais obtidos. Por fim, na seção 5, são apresentadas as considerações finais do trabalho.

2 Conceitos gerais

Nesta seção, algumas definições básicas da modelagem matemática de um pêndulo amortecido e sobre a identificação de modelos matemáticos baseados em experimentos, em específico utilizando-se as técnicas de Smith e Mollenkamp para sistemas de segunda ordem, são apresentadas. Além disso, conceitos básicos sobre o controle adaptativo por modelo de referência (MRAC – *Model Reference Adaptive Control*) também são apresentados.

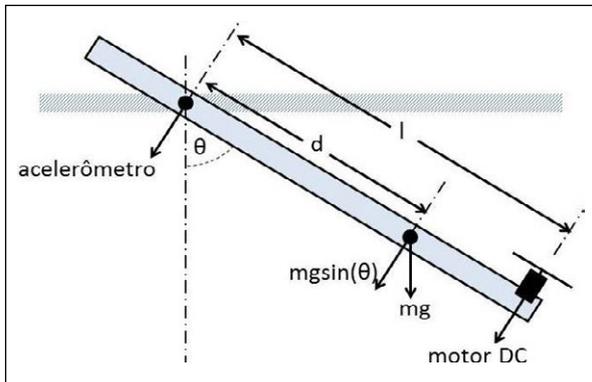
2.1 Modelagem do pêndulo amortecido

A figura esquemática do pêndulo amortecido considerado é ilustrada na Figura 1. O pêndulo consiste em uma barra vertical, com um acelerômetro para a medição da posição angular, no ponto do pivô, como ilustrado na referida Figura. No ponto extremo da barra, há um sistema propulsor composto por um motor DC e uma hélice. Ao ser aplicada uma tensão elétrica ao motor DC, a hélice gira, gerando o torque T , deslocando o pêndulo. O objetivo é posicionar o pêndulo em um ângulo θ especificado.

A relação entre a tensão elétrica V aplicada ao motor DC e o torque T pode ser escrita como:

$$T(t) = K_m \cdot V(t) \quad (1)$$

Figura 1 – Sistema do pêndulo amortecido



Fonte: Elaborado pelos autores.

De acordo com as leis de Newton e com a equação do momento angular, a equação dinâmica não linear que descreve o movimento do pêndulo é dada por:

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} + m \cdot g \cdot d \cdot \sin \theta = T(t) \quad (2)$$

Os parâmetros do sistema são descritos na Tabela 1, sendo $\theta(t)$ a posição angular, como a variável de saída, e $V(t)$, a variável de entrada do sistema dinâmico.

Tabela 1 – Parâmetros do pêndulo amortecido

Símbolo	Descrição
K_m	Constante de torque do motor
J	Momento de inércia
c	Amortecimento
d	Massa do pêndulo
m	Distância do centro de gravidade ao pivô do pêndulo
l	Comprimento da barra em relação ao motor
g	Aceleração da gravidade

Fonte: Elaborado pelos autores.

Considerando que $\theta(t)$ seja uma grandeza suficientemente pequena, então $\sin \theta \approx \theta$. A equação

linearizada do sistema dinâmico do pêndulo amortecido pode ser reescrita como:

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + c \frac{d\theta(t)}{dt} + m \cdot g \cdot d \cdot \theta(t) = T(t) \quad (3)$$

Substituindo a Equação 1 na Equação 3 e aplicando a transformada de Laplace, a função de transferência do pêndulo amortecido é escrita como:

$$\frac{\theta(t)}{V(t)} = \frac{K_m/J}{s^2 + \frac{c}{J}s + \frac{m \cdot g \cdot d}{J}} \quad (4)$$

2.2 Métodos determinísticos de obtenção de modelos matemáticos para sistemas dinâmicos

Para que a modelagem matemática baseada em dados experimentais de um pêndulo amortecido se assemelhasse com o modelo estabelecido na Equação 4, métodos determinísticos de segunda ordem foram utilizados.

Um modelo paramétrico da dinâmica de um sistema de segunda ordem pode ser caracterizado pela função de transferência $G(s) = Y(s)/U(s)$, dada por:

$$G(s) = \frac{K e^{-Ls}}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} = \frac{K \omega_n^2 e^{-Ls}}{s^2 + 2\xi \omega_n s + \omega_n^2} \quad (5)$$

sendo: $\tau_{1,2}$ as constantes de tempo do sistema dinâmico; L o atraso do sistema; ξ o coeficiente de amortecimento; ω_n a frequência natural do sistema; $U(s)$ e $Y(s)$ representam a entrada e a saída do sistema dinâmico, respectivamente.

Na literatura, existe uma variedade de métodos baseados na curva de reação do sistema dinâmico aplicando-se um sinal do tipo degrau à entrada, para a identificação dos parâmetros ξ e ω_n ou $\tau_{1,2}$ (ver Equação 5). O uso do índice RMSE (*Root-Mean-Square Error*) permitiu a escolha dos métodos de Mollenkamp e de Smith para sistemas de segunda ordem, citados por Coelho e Coelho (2004), frente a outros utilizados nos testes aplicados ao pêndulo amortecido, inclusive de primeira ordem, tais como Ziegler-Nichols em malha aberta, Broida e Smith de primeira ordem, com seus resultados omitidos neste artigo.

2.2.1 Método de Mollenkamp

No método de Mollenkamp, três pontos intermediários sobre a curva de reação do sistema são identificados: t_1 , t_2 e t_3 , que são os tempos para a saída alcançar 15%, 45% e 75% do regime permanente, respectivamente. Com base nesses instantes de tempo, os parâmetros do modelo paramétrico de segunda ordem são calculados pelo algoritmo (Equações 6 a 12).

O fator de esquecimento ξ é calculado por:

$$\xi = \frac{0,0805 - 5,547 \times (0,475 - x)^2}{(x - 0,356)^2} \quad (6)$$

com x calculado por:

$$x = \frac{t_2 - t_1}{t_3 - t_1} \quad (7)$$

Uma função $f_2(\xi)$ é calculada em função do valor de ξ (Equação 8), para a estimativa de ω_n (Equação 9):

$$\begin{cases} f_2(\xi) = 0,708 \times (2,811)^\xi, & \text{se } \xi < 1 \\ f_2(\xi) = 2,6\xi - 0,60, & \text{se } \xi \geq 1 \end{cases} \quad (8)$$

$$\omega_n = \frac{f_2(\xi)}{t_3 - t_1} \quad (9)$$

Para o cálculo do atraso do sistema (θ), é utilizado:

$$\theta = t_2 - \frac{f_3(\xi)}{\omega_n} \quad (10)$$

com:

$$f_3(\xi) = (0,922)(1,66)^\xi \quad (11)$$

No caso de $\xi \geq 1$, as constantes de tempo são calculadas por:

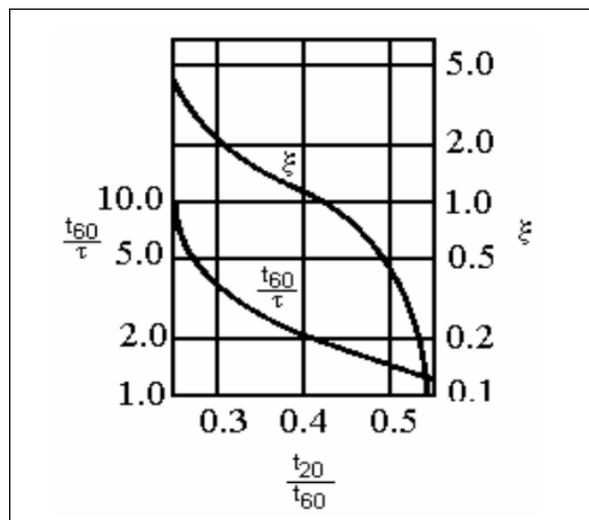
$$\tau_{1,2} = \frac{\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1}}{\omega_n} \quad (12)$$

Ao manipular matematicamente as equações desses parâmetros é possível estimar os valores de ξ e ω_n ou $\tau_{1,2}$, estimando um modelo de segunda ordem de um sistema dinâmico.

2.2.2 Método de Smith para Sistemas de Segunda Ordem

Segundo Coelho e Coelho (2004), nesse método, dois instantes de tempo são identificados sobre a curva de reação, que são os parâmetros t_{20} e t_{60} , correspondentes a 20% e 60% do regime permanente, respectivamente, com o aparente atraso de transporte, removido. A partir do gráfico da Figura 2, obtém-se o parâmetro ξ por meio da relação de t_{20}/t_{60} , com a estimativa do parâmetro τ calculada a partir da relação $(t_{60}/\tau) \times (t_{20}/t_{60})$, também pelo gráfico da Figura 2.

Figura 2 – Identificação dos parâmetros t_{20}/t_{60} , τ e ξ pelo método de Smith



Fonte: Coelho e Coelho (2004).

No gráfico da Figura 2, a linha do eixo das abscissas indica a relação (t_{20}/t_{60}) , a curva superior indica a relação entre o ξ e (t_{20}/t_{60}) , e a curva inferior indica a relação entre (t_{60}/τ) e (t_{20}/t_{60}) . Desse modo, é possível descobrir os valores em que as duas curvas estão no eixo das ordenadas, sendo a curva superior analisada pelo lado direito, e a inferior pelo lado esquerdo, para que sejam obtidos os valores ξ e t_{60}/τ , respectivamente. De posse do valor de t_{60} , calcula-se o valor de τ .

Para sistemas subamortecidos, a Equação 5 pode ser utilizada com os parâmetros encontrados

ou a Equação 13 ser utilizada como a função de transferência de um sistema de segunda ordem com os parâmetros calculados pela Equação 14.

$$G_p(s) = \frac{Ke^{-Ls}}{\tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1} \quad (13)$$

$$\tau_{1,2} = \tau\xi \pm \tau\sqrt{\xi^2 - 1} \quad (14)$$

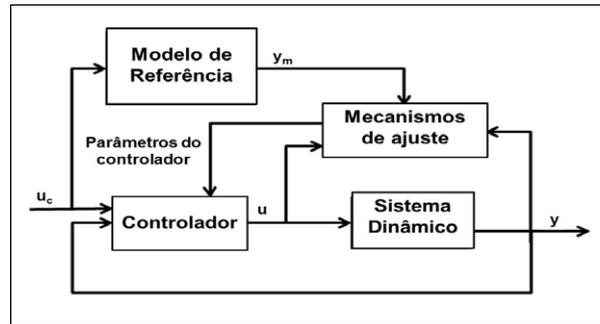
2.3 Controle Adaptativo por Modelo de Referência

Um sistema de controle realimentado é mais robusto em relação às perturbações e às variações nas características do sistema dinâmico do que em malha aberta. Nem sempre, porém, essas variações do sistema são sutis e, portanto, acabam tendo efeitos significativos sobre o comportamento do sistema dinâmico. Com isso, um controlador linear pode ser incapaz de atender às especificações de desempenho, por não ser flexível, havendo a necessidade do uso de técnicas de controle mais eficientes e que sejam capazes de ajustar os seus parâmetros, de acordo com as variações do sistema.

No controle adaptativo por modelo de referência (MRAC – *Model Reference Adaptive Control*), a ideia básica é que o sistema se comporte como um dado modelo matemático de referência. Esse modelo representa a dinâmica desejada para o sistema; o objetivo do controle adaptativo, nesse caso, é fazer com que a saída do sistema dinâmico convirja, assintoticamente, para a saída do modelo de referência (LAGES; HEMERLY, 2007).

Um diagrama de blocos do sistema com o MRAC é ilustrado na Figura 3, consistindo em duas malhas: a malha interna, que é a malha de realimentação comum, composta pelo sistema dinâmico e pelo controlador; a malha externa, que ajusta os parâmetros do controlador de tal maneira que o erro, que é a diferença entre a saída do sistema dinâmico de y e o modelo de saída y_m , seja pequeno. O mecanismo para o ajuste dos parâmetros em um sistema MRAC pode ser obtido utilizando-se um método por gradiente ou aplicando-se a teoria da estabilidade (ASTROM; WITTENMARK, 2008), sendo o primeiro, o método por gradiente, a opção utilizada neste trabalho.

Figura 3 – Diagrama de blocos de um sistema MRAC



Fonte: Astrom e Wittenmark (2008).

Se os parâmetros do sistema dinâmico forem conhecidos, os parâmetros correspondentes do controlador devem ser tais que levem a saída do sistema dinâmico a convergir para a saída do modelo de referência. Desse modo, o principal problema no projeto de um MRAC é obter um mecanismo de ajuste dos parâmetros do controlador, com o objetivo de que o erro entre a saída do sistema dinâmico y e a saída do modelo de referência y_m convirja para zero.

A regra do MIT (ASTROM; WITTENMARK, 2008), que consiste em utilizar as suas estimativas no instante t , ao invés dos parâmetros desconhecidos, foi proposta para resolver esse problema, podendo ser considerada como um método de gradiente para minimizar o erro quadrático e^2 , dada por (ASTROM, 1983):

$$\frac{d\theta}{dt} = -\gamma \frac{\partial J}{\partial \theta} = -\gamma e \frac{\partial e}{\partial \theta} \quad (15)$$

Considerando um sistema de segunda ordem:

$$\ddot{y}(t) = -a\dot{y}(t) - by(t) - cr(t) \quad (16)$$

O modelo de referência escolhido é dado por:

$$\ddot{y}_m(t) = -a_m\dot{y}_m - b_my_m - c_mr(t) \quad (17)$$

com a lei de controle estabelecida por:

$$u(t) = \theta_1 r(t) - \theta_2 \dot{y}(t) - \theta_3 y(t) \quad (18)$$

Realizando as devidas manipulações entre as Equações 16 a 18, a saída do sistema dinâmico é dada por:

$$y(t) = \frac{c\theta_1}{p^2 + (a + c\theta_2)p + (b + c\theta_3)}r(t) \quad (19)$$

sendo

$$\begin{cases} \theta_1 = \frac{c_m}{c} \\ \theta_2 = \frac{a_m - a}{c} \\ \theta_3 = \frac{b_m - b}{c} \end{cases} \quad (20)$$

Em que: a , b e c são parâmetros do sistema dinâmico; a_m , b_m e c_m parâmetros do modelo de referência; θ_1 , θ_2 e θ_3 parâmetros da lei de controle.

Considerando $p=(d(\cdot))/dt$ e isolando o $y_m''(t)$, a partir da Equação 17, o modelo de referência para um sistema de segunda ordem é dado por:

$$y_m''(t) = \frac{c_m r(t)}{p^2 + a_m p + b_m} \quad (21)$$

Dessa forma, a partir do uso do método do gradiente (Equação 15), os parâmetros da lei de controle podem ser estimados por:

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta_1}{\partial t} = -\gamma_1 e \frac{b_m}{p^2 + a_m p + b_m} r(t) \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial t} = -\gamma_2 e \frac{b_m}{p^2 + a_m p + b_m} \dot{y}(t) \\ \frac{\partial \theta_3}{\partial t} = -\gamma_3 e \frac{b_m}{p^2 + a_m p + b_m} y(t) \end{cases} \quad (22)$$

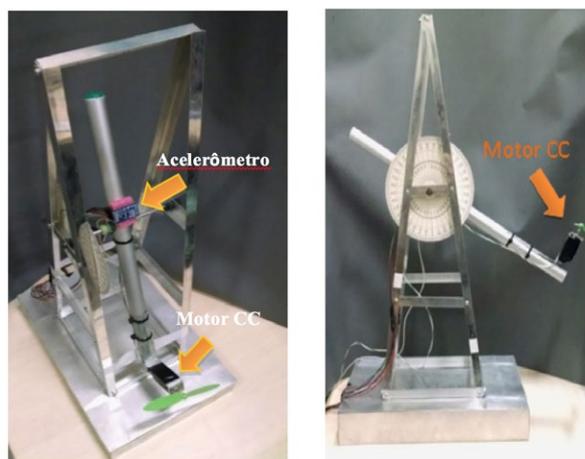
com γ_1 , γ_2 e γ_3 sendo as taxas de adaptação.

Utilizando-se a Equação 22, é possível projetar o controlador adaptativo MRAC, aplicando-se a regra do MIT em sistemas dinâmicos não lineares, tal como o pêndulo amortecido utilizado neste trabalho.

3 Pêndulo amortecido

O sistema dinâmico do pêndulo amortecido foi desenvolvido a partir de materiais de baixo custo, consistindo de peças em alumínio, presas com parafusos, para formar uma torre resistente, que suportasse o peso do pêndulo sem causar danos à estrutura, como ilustra a Figura 4. No ponto extremo da barra, há um motor e uma hélice que formam o sistema propulsor. No ponto de conexão entre a barra e a torre, está localizado um acelerômetro capacitivo (modelo MMA7361), além do sistema de aquisição de dados baseado em um Arduino Uno R3.

Figura 4 – Fotos do pêndulo amortecido desenvolvido



Fonte: Acervo pessoal dos autores.

Com o objetivo de controlar a posição angular do pêndulo amortecido, de acordo com a referência desejada, a tensão do motor CC é considerada a variável de entrada do sistema dinâmico, e a variável de saída é a posição angular (θ) da barra do pêndulo amortecido, que é proporcional ao sinal de tensão fornecido pelo acelerômetro. O projeto do sistema de controle adaptativo baseado em MRAC foi implementado por meio do uso do Matlab/Simulink em um computador.

4 Resultados

Para verificar a viabilidade do projeto do sistema de controle adaptativo baseado no MRAC, foram realizadas as etapas de identificação de modelos matemáticos, para o sistema do pêndulo amortecido, por meio de métodos determinísticos, e simulações para o projeto de controle adaptativo.

4.1 Identificação de modelos matemáticos do pêndulo amortecido

Para a identificação de um modelo matemático de segunda ordem que pudesse representar a dinâmica do pêndulo amortecido, um sinal do tipo degrau foi aplicado na entrada do sistema em malha aberta. Com os dados adquiridos, os métodos de Mollenkamp e de Smith de segunda ordem foram aplicados para obter as funções de transferência que representassem o comportamento do sistema dinâmico em uma faixa de trabalho escolhida (entre 30° e 70°).

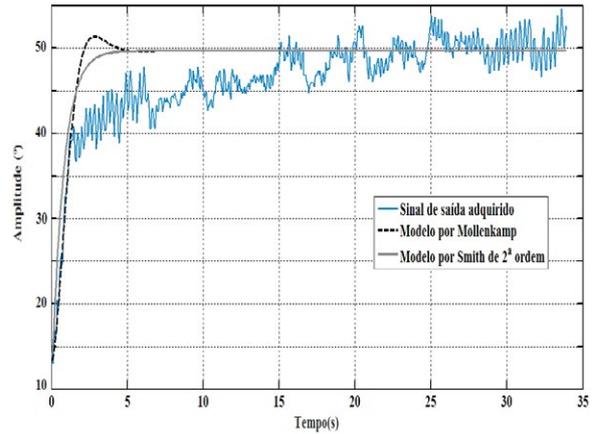
As funções de transferências estimadas pelos métodos de Mollenkamp e de Smith são representadas por (23) e (24), respectivamente, considerando-se o atraso de transporte desprezível.

$$G_{MK}(s) = \frac{27,77}{s^2 + 2,155s + 2,358} \quad (23)$$

$$G_{SM}(s) = \frac{11,78}{0,06767s^2 + 0,8513s + 1} \quad (24)$$

O gráfico da Figura 5 ilustra as respostas dos modelos matemáticos obtidos pelos dois métodos, comparados com os dados adquiridos experimentalmente, para o sistema em malha aberta. Observa-se que as funções de transferência estimadas representam uma aproximação da dinâmica do pêndulo amortecido no ponto de operação escolhido, sendo a estimação pelo método de Mollenkamp a curva apresenta um sobressinal (linha preta tracejada), enquanto que, pelo método de Smith de 2ª ordem, a curva não apresenta esse sobressinal e se representa pela linha cinza.

Figura 5 – Gráfico da resposta ao sinal do tipo degrau com os dados adquiridos do sistema dinâmico e estimados pelos métodos de Mollenkamp e de Smith de segunda ordem



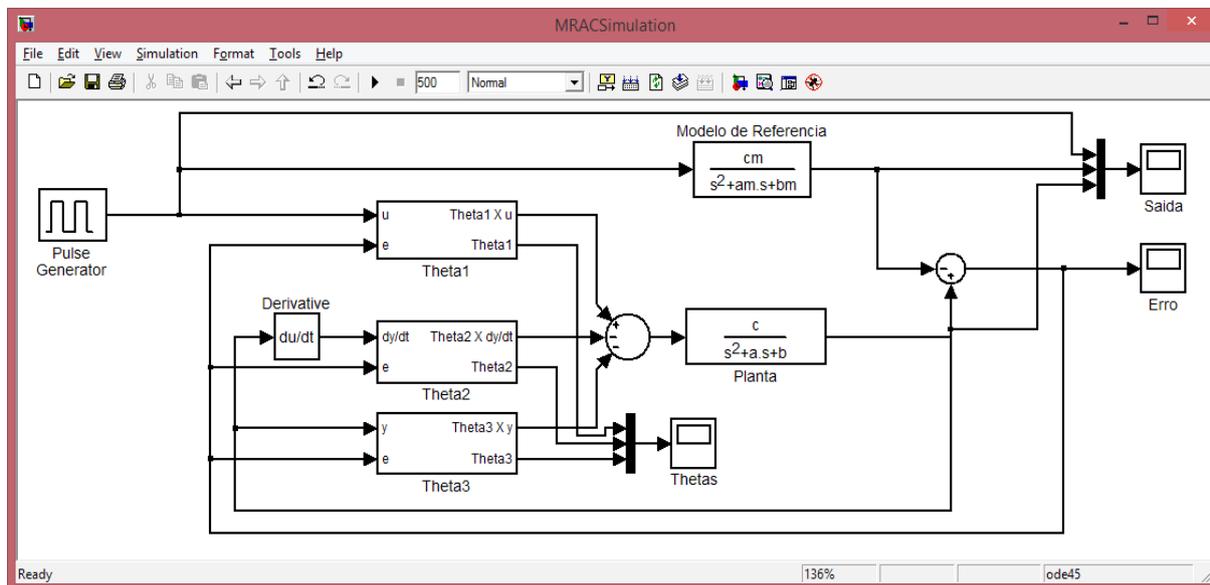
Fonte: Dados da pesquisa.

O sinal de saída adquirido (linha azul) aparenta não ser estável, devido às vibrações que o motor causou no sensor acelerômetro na aquisição do sinal. Mesmo com essa dificuldade, o controlador Adaptativo MRAC conseguiu controlar o sistema, como será visto a seguir.

4.2 Simulação do Controlador Adaptativo MRAC

As simulações do sistema dinâmico, incluindo o controlador adaptativo MRAC para o controle da posição angular, foram realizadas utilizando-se o Simulink, com o diagrama de simulação ilustrado na Figura 6. As constantes a_m , b_m e c_m são as variáveis de referência utilizadas para o modelo, e as constantes a , b e c são as variáveis que definem a função de transferência do sistema – essas variáveis se encontram na Tabela 2, tanto para a função de transferência estimada por Mollenkamp (MK) quanto para a estimada por Smith, de 2ª ordem (SM).

Figura 6 – Diagrama de simulação no Simulink do MRAC para controle de posição angular do pêndulo



Fonte: Dados da Pesquisa.

Tabela 2 – Valores dos parâmetros do projeto MRAC

Parâmetro	MK	SM
a_m	40	40
b_m	400	400
c_m	400	400
a	2,155	12,58
b	2,358	14,78
c	27,77	174
γ_1	-1,5	-1,5
γ_2	1,5	1,5
γ_3	1,5	1,5

Fonte: Dados da Pesquisa.

Para a utilização da regra do MIT como citado na Seção 2, a etapa de sintonia dos parâmetros γ_1 , γ_2 e γ_3 (Tabela 2), que são as taxas de adaptação, foi realizada de forma empírica, ajustando-se o resultado da saída do sistema dinâmico ao sinal de referência desejado.

Para a escolha do modelo de referência do projeto MRAC, representado pela função de transferência da Equação 25, esse foi especificado com a característica de ter polos reais e iguais, localizados em -20 no domínio s .

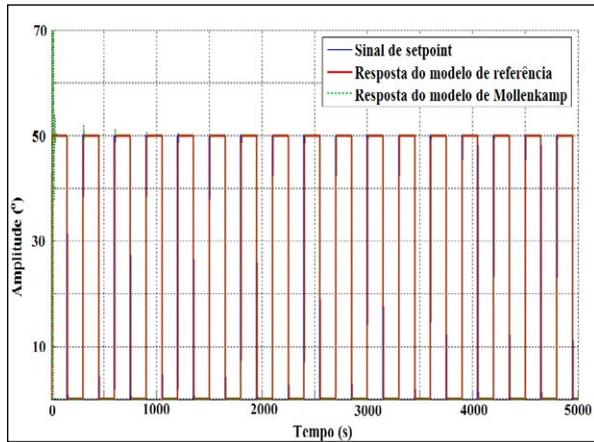
$$G_m(s) = \frac{400}{s^2 + 40s + 400} \quad (25)$$

Após a aplicação do modelo de referência para cada método, as respostas do modelo de referência e do modelo identificado foram obtidas para uma entrada do tipo onda quadrada. A Figura 7 ilustra as

Respostas, usando-se o controlador MRAC, projetado com base no modelo identificado por meio do método de Mollenkamp e do modelo de referência.

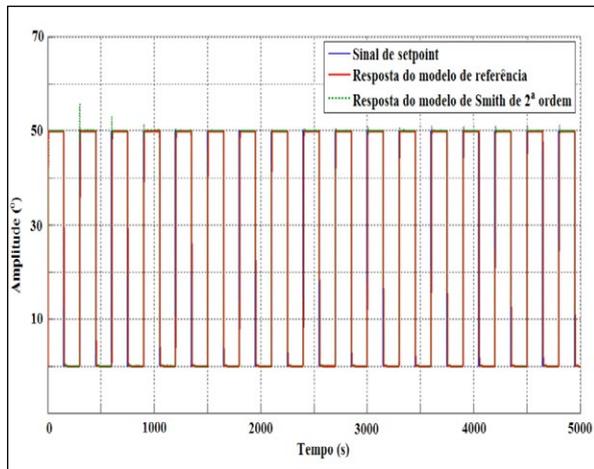
A Figura 8 ilustra a comparação das respostas do modelo identificado pelo método de Smith de segunda ordem e do modelo de referência, onde se observa que acompanham o sinal de onda quadrada aplicado à entrada.

Figura 7 – Sinal de *setpoint* e as saídas do modelo de referência e do modelo do sinal dinâmico estimado pelo método de Mollenkamp



Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 8 – Sinal de *setpoint* e as saídas do modelo de referência e do modelo do sinal dinâmico estimado pelo método de Smith de segunda ordem



Fonte: Dados da pesquisa.

Observando os gráficos das Figuras 7 e 8, percebe-se que o controlador, inicialmente não consegue fazer com que o sistema siga a referência, mas vai ajustando seus parâmetros de forma gradativa, até que a resposta do sistema consiga rastrear o sinal de entrada.

O desempenho dos controladores projetados é avaliado por meio do uso de índices de desempenho. Neste trabalho, os índices de desempenho, IAE (*Integrated Absolute value of the Error*) e ITAE (*Integral of Time-weighted Absolute Error*), foram utilizados sendo calculados por meio do acompanhamento da trajetória da resposta, em relação a um valor de

referência desejado, ao longo de uma janela de tempo definida para avaliação. Na Tabela 3, são apresentadas as equações para cada índice de desempenho mencionado (CAMPOS; TEIXEIRA, 2006).

Tabela 3 – Índices de desempenho para avaliação do controle em malha fechada

Índice de desempenho	Descrição	Equação
IAE	Integral do módulo do erro	$\sum_{k=1}^N e(k) $
ITAE	Integral do módulo do erro vezes o tempo	$\sum_{k=1}^N k e(k) $

Fonte: Dados da Pesquisa.

Nesses índices, $e(k)$ é a diferença entre o valor medido da resposta e o valor desejado para ela, em cada instante k ao longo da janela.

Para as duas funções de transferência identificadas pelos métodos de Mollenkamp e de Smith, os índices IAE e ITAE foram calculados para uma janela de avaliação de 5.000 amostras. Os resultados são exibidos na Tabela 4, sendo considerado o melhor método aquele que apresenta os menores valores para os índices.

Nota-se que o método de Mollenkamp foi o que obteve melhor resultado, tanto se utilizando o índice IAE quanto o índice ITAE.

Tabela 4 – Resultados dos índices de desempenho das simulações

Método de identificação	IAE	ITAE
Mollenkamp	42,0515	9.036
Smith	86,7451	152.050

Fonte: Dados da Pesquisa.

5 Resultados experimentais

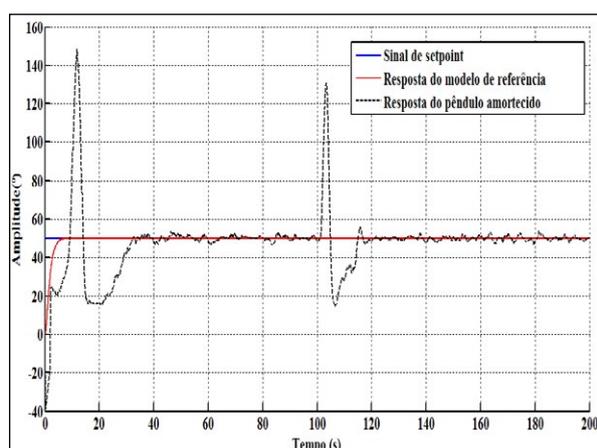
Para a verificação do projeto do controlador MRAC, para a posição angular do pêndulo amortecido, construído em laboratório, realizaram-se experimentos a partir da utilização do Simulink para a implementação do controlador e o gerenciamento dos dados adquiridos – assim como se procedeu com os modelos apresentados anteriormente. Também foi utilizado um

Arduino Uno, como uma placa de aquisição para envio dos dados para o controlador.

A implementação do sistema foi realizada com o mesmo modelo de referência apresentado na Equação 19, utilizado na simulação. No experimento, foram feitas comparações entre os sinais da resposta do pêndulo amortecido e do modelo de referência bem como do sinal de entrada aplicado como referência, com os resultados ilustrados na Figura 9.

Observa-se, na Figura 9, acima citada, que foi imposto ao sistema dinâmico uma perturbação de 120° na posição angular em 100 segundos, sendo possível verificar que o sistema consegue retornar ao sinal de referência em torno de 17 segundos.

Figura 9 – Sinal de *setpoint*, e as saídas do modelo de referência e do pêndulo amortecido, para um sistema de segunda ordem



Fonte: Dados da Pesquisa.

6 Considerações finais

Neste trabalho, foi utilizado o projeto de controladores adaptativos MRAC, aplicado ao sistema de um pêndulo amortecido. Além disso, métodos experimentais, para a determinação de modelos matemáticos de segunda ordem desse sistema dinâmico, baseados na identificação por curva de reação pelos métodos de Mollenkamp e de Smith, também foram estudados e aplicados.

De acordo com os resultados apresentados, o sistema de controle adaptativo projetado pela técnica MRAC se mostrou eficiente, tanto pelos resultados por simulação como também pelos resultados experimentais realizados na plataforma do sistema do pêndulo amortecido. Os dados de simulação e dos

experimentos permitem verificar a utilidade de um método determinístico baseado em testes simples, como a aplicação de um sinal do tipo degrau, para obter um modelo matemático, estimado em uma faixa de trabalho especificado e o seu uso ao projeto de controladores baseados em modelos, em específico, para o caso do pêndulo amortecido desenvolvido.

Apesar dos conceitos triviais apresentados neste artigo, esses podem ser consolidados e comprovados pelos discentes em possíveis disciplinas na área de sistemas de controle, utilizando-se metodologias ativas de aprendizagem (ELMÔR FILHO *et al.*, 2019), tais como a Aprendizagem baseada em projeto (PjBL - *Project-Based Learning*), bastante discutida e utilizada no cenário atual da Educação, incluindo as novas DCNs (Diretrizes Curriculares Nacionais) das Engenharias (BRASIL, 2019).

Em trabalhos futuros, a utilização de outros métodos para a identificação de modelos bem como outras técnicas de controle poderão ser comparados com o controlador adaptativo MRAC, o que permitirá uma avaliação do desempenho desses controladores no sistema do pêndulo amortecido. Além disso, é possível melhorar a construção do sistema dinâmico, para evitar ruídos e vibrações, detalhes também verificados neste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba (IFPB), que deu todo o suporte para a criação do projeto, à Universidade Federal do Rio Grande do Norte (UFRN) e ao Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Bahia (IFBA), por auxiliarem com a continuidade da pesquisa.

REFERÊNCIAS

- ASTROM, K. J. Theory and applications of adaptive control - a survey. **Automatica**, v. 19, n. 5, p. 471-486, 1983.
- ASTROM, K. J.; WITTENMARK, B. **Adaptive control**. Dover, 2008.
- BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. Câmara de Educação Superior. Resolução no 2, de 24 de abril de 2019. **Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia**, Brasília, 26 abr. 2019. Edição 89. Seção 1, p. 43.

CAMPOS, M. C. M. M.; TEIXEIRA, H. C. G.
Controladores típicos de equipamentos e processos industriais. São Paulo: Blucher, 2006.

COELHO, A. A. R.; COELHO, L. S.
Identificação de sistemas dinâmicos lineares. Florianópolis: Ed. UFSC, 2004.

ELMÔR FILHO, G. *et al.* **Uma nova sala de aula é possível:** aprendizagem ativa na educação em Engenharia. Rio de Janeiro: LTC, 2019.

ENIKOV, E. T.; CAMPA, G. Mechatronics aeropendulum: demonstration of linear and nonlinear feedback control principles with Matlab/Simulink real-time windows target. **IEEE Transactions on Education**, v. 55, n. 4, p. 538-545, 2012.

FAROOQ, U. *et al.* Observer based fuzzy LMI regulator for stabilization and tracking control of an aeropendulum. *In: IEEE 28th CANADIAN CONFERENCE ON ELECTRICAL AND COMPUTER ENGINEERING*, 2015, Halifax. **Proceedings...** 2015. p. 1508-1513.

GHASEMI, R.; KHOYGANI, M. R. R. Designing intelligent controller for nonlinear pendulum dynamical system. **International Journal of Computer, Electrical, Automation, Control and Information Engineering**, v. 8, n. 11, p. 2021-2025, 2014.

HABIB G. *et al.* Nonlinear model-based parameter estimation and stability analysis of an aero-pendulum subject to digital delayed control. **International Journal of Dynamics and Control**, v. 5, p. 629-643, 2017.

JOB, M. M.; JOSE, P. S. H. Modeling and control of mechatronic aeropendulum. *In: 2015 INTERNATIONAL CONFERENCE ON INNOVATIONS IN INFORMATION, EMBEDDED AND COMMUNICATION SYSTEMS (ICIIECS)*, 2015, Coimbatore, **Proceedings...** 2015.

KIZMAZ, H.; AKSOY, S.; MUHURCU, A. Sliding mode control of suspended pendulum. *In: INTERNATIONAL SYMPOSIUM MODERN ELECTRIC POWER SYSTEMS (MEPS)*, 2010, Wroclaw, **Proceedings...** 2010.

KNIHS, V. L. *et al.* Avaliação e projeto de um controlador self-tuning na estabilização de sistemas oscilatórios. *In: 2010 9th IEEE/IAS INTERNATIONAL CONFERENCE ON INDUSTRY APPLICATIONS (INDUSCON 2010)*, 2010, São Paulo, **Proceedings...** 2010.

LAGES, W. F.; HEMERLY, E. M. Controle adaptativo. AGUIRRE, L. A. (Org.). **Enciclopédia**

de automática: controle & automação, volume 2, São Paulo: Blucher, 2007. cap. 13.

LEMES, A. G.; SILVEIRA, A. S.; COELHO, A. A. R. Pseudo controlador PID: projeto e sintonia automática. *In: XVIII CONGRESSO BRASILEIRO DE AUTOMÁTICA (CBA 2010)*, 2010, Bonito, **Anais...** 2010.