Cônicas não degeneradas: dedução das equações geral e polar

Bárbara Kaline de Sousa [1], Kíssia Carvalho [2], Leonardo Ferreira Soares [3]

[1] barbarakalinedesousa@gmail.com. [2] kissia.carvalho@ifpb.edu.br. [3] leonardoferreira@ifpb.edu.br. IFPB – Campus Cajazeiras/Curso de Licenciatura em Matemática.

RESUMO

O estudo das cônicas tem início basicamente no ensino médio como geometria analítica e segue no ensino superior com o estudo das cônicas. Em geral esse assunto é encontrado dentro de capítulos de livros; poucos são os livros que abordam as cônicas com devida profundidade. As equações polares parecem ser as mais negligenciadas, pois alguns textos não abordam tais equações, outros apenas trazem a equação por excentricidade sem apresentar suas deduções. Observada esta lacuna, questionamos a necessidade de produzir um único material que contenha as equações polares das cônicas não degeneradas. Para isto, foi feita uma ampla pesquisa bibliográfica nas bases acadêmicas de dados e reunidas todas as equações das cônicas encontradas, em particular das cônicas não degeneradas. Aqui temos como objetivo apresentar a definição geral de cônica que nos conduz à equação geral das cônicas e às equações polares das cônicas não degeneradas (Parábola, Elipse e Hipérbole) de duas formas: via excentricidade e por substituição direta das coordenadas cartesianas por polares (não encontrada na literatura pesquisada). Ao longo deste trabalho mostramos que é possível desenvolver detalhadamente todas as equações polares das cônicas não degeneradas em relação à excentricidade, mas também por substituição direta.

Palavras-chave: Cônicas, Equações Polares, Parábola, Hipérbole, Elipse, Circunferência

ABSTRACT

The study of conics begins, mostly, in high school as analytical geometry and it continues in higher education with the study of conics. In general, this subject is found within book chapters and rare books severely approach the conics. The polar equations seem to be the most neglected, some texts do not address such equations, and others barely exhibit the equation through eccentricity without presenting their deductions. Regarding such gap, we questioned the need to produce a single material that contains the polar equations of the non-degenerate conics. Therefore, we made a wide bibliographic search into academic databases, and we gathered all the equations of the conics found and of the non-degenerate conics. In this article we aim to present the general definition of conics, that leads us to the general equation of the conics and the polar equations of the non-degenerate conics (Parabola, Ellipse and Hyperbole), by two different ways: eccentricity, and direct substitution of cartesian coordinates to polar ones (not found in the researched literature). Throughout this research, we showed that it is possible to develop in detail all the polar equations of the non-degenerate conics, in relation to eccentricity as well as through direct substitution.

Keywords: *conics, polar equations, Parabola, Hyperbole, Ellipse*

 SUBMETIDO 21/02/2020 > APROVADO 06/04/2020

1 Introdução

O estudo das cônicas, assim como a maior parte dos conceitos matemáticos, surgiu pela necessidade de resolver problemas. Apesar da sua importância e aplicabilidade no cotidiano, o estudo das cônicas apresenta-se como um estudo de geometria analítica no ensino médio ou de cálculo vetorial no ensino superior, sendo poucos os livros que abordam os seus conceitos com profundidade. Essa observação levou-nos a perceber uma lacuna no estudo das cônicas, que é a reunião de todas as equações em um único texto acadêmico.

Assim, este artigo apresenta-se como parte do Trabalho de Conclusão do Curso (TCC) de Especialização em Matemática que teve o objetivo de reunir, em um único documento, as demonstrações da equação geral das cônicas (em suas várias formas) e as equações das cônicas não degeneradas. Neste artigo, temos como objetivo apresentar um recorte destas demonstrações, abordando apenas a equação geral das cônicas e as equações polares das cônicas não degeneradas, pois estas são as menos exploradas em suas demonstrações na literatura.

É sobre as cônicas não degeneradas, ou seja, aquelas em que a superfície do plano não passa pelo vértice do cone, Parábola, Elipse e Hipérbole, que encontramos grande parte dos trabalhos científicos. É possível se deparar com trabalhos dos mais variados enfoques, dos quais destacamos:

- Pereira (2017) que apresenta o Teorema Espectral (usado para encontrar autovalores e autovetores) para estudar as secções cônicas.
- Rosi (2017) e Lago (2017) que fornecem um enfoque voltado para a educação matemática investigando a aplicação das cônicas e sua visão histórica.
- Lopes (2011) que apresenta um estudo das cônicas nos aspectos geométrico, analítico e da definição foco-diretriz analisando os resultados por meio do software Geogebra.
- Neto (2017) que apresenta aplicações das cônicas na engenharia civil e na navegação.

Apesar de existir muito material produzido sobre as cônicas não degeneradas, não encontramos textos que apresentassem detalhadamente demonstrações das equações polares, tanto na abordagem via excentricidade, que é mais fácil de ser encontrada, como na derivada da fórmula geral, substituindo coordenadas cartesianas por polares, que não foram encontradas na literatura pesquisada.

Deste modo, este artigo vem destacar e demonstrar as equações geral e polar das cônicas a fim de dar maior visibilidade para essas equações, evidenciando que existem outras maneiras de abordar a equação polar de uma cônica que não seja apenas em relação a sua excentricidade.

2 Referencial teórico

Ao contrário do que afirma Lopes (2011), os autores Venturi (2003), Monteiro (2014) e Souza (2016) descrevem que o estudo das cônicas teve início com os matemáticos Menaecmus (380 a. C - 320 a. C). Acredita-se que Euclides tenha feito uma obra sobre o estudo das cônicas e que Apolônio tenha se inspirado nela para realizar a maior produção sobre as cônicas existentes até então; isso porque a obra de Euclides foi perdida com o passar dos anos. Mas, foi o matemático Menaecmus que descobriu a elipse, a parábola e a hipérbole.

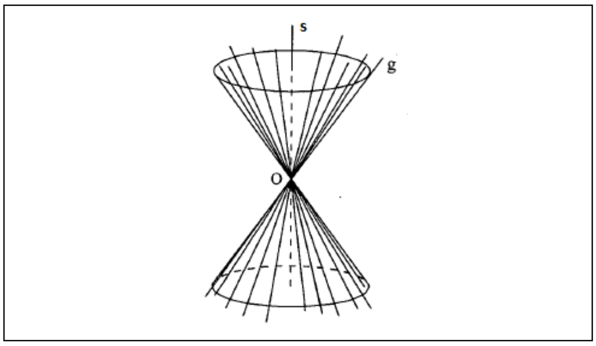
> Apolônio não só reproduziu os conhecimentos de seus predecessores como também acrescentou uma infinidade de novos teoremas com um exaustivo estudo dessas curvas, todos deduzidos somente com Geometria, embora se suponha que teorias mais complicadas, Apolônio obteve com cálculos mais modernos. Seu trabalho superou todos os anteriores e passa a ser uma referência sobre o assunto. (CONTADOR, 2012, p. 351).

Apolônio conseguiu obter todas as cônicas variando apenas a inclinação do plano que intercepta um cone de duas folhas.

> Antes de Apolônio, os gregos tiravam as cônicas de três tipos de cones de revolução, conforme o ângulo do vértice da seção meridiana fosse menor que, igual ou maior que um ângulo reto. Seccionando-se cada um desses tipos de cone com um plano perpendicular a uma geratriz resultam respectivamente uma elipse, parábola e hipérbole [...]. (EVES, 2004, p. 199).

Dado um cone de duas folhas (veja figura 1) e um plano α que muda sua inclinação em relação ao cone, podemos obter todas as superfícies cônicas como: o vazio, uma reta (veja figura 2 (a)), o ponto (veja figura 2 (b)), um par de retas (veja figura 2 (c)), a parábola, a elipse e circunferência, e a hipérbole.

Figura 1– Cone de duas folhas

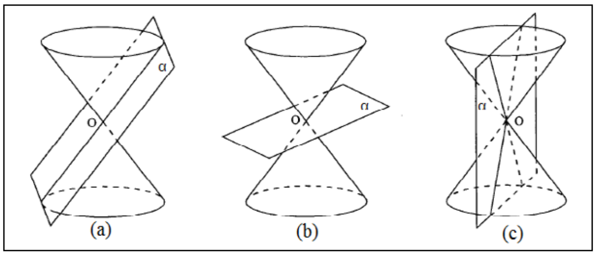


Fonte: Winterle (2000), adaptado pelo autor

O vazio é quando o plano α não toca o cone. Esse é um ponto controverso dentro do conceito de cônicas. Alguns autores como Peres (2014), Winterle (2000), Steinbruch e Winterle (1987) não citam em seus trabalhos o vazio como sendo uma cônica. Já no livro "Geometria Analítica", Reis e Silva (2013) mostram que uma equação do segundo grau com duas variáveis representa uma cônica, logo, uma equação do tipo $ax^2 + by^2 + c = 0$ que represente o gráfico de um conjunto vazio também representará uma cônica. Assim, pode-se concluir que o conjunto vazio também é uma cônica.

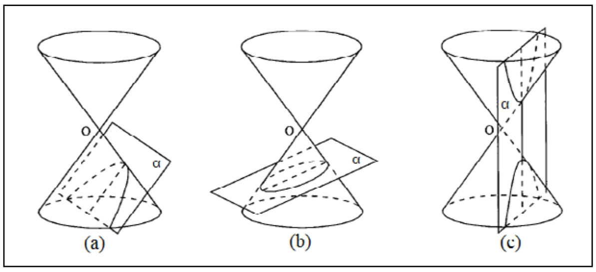
As cônicas não degeneradas são aquelas obtidas quando o plano que intercepta o cone de duas folhas não passa pelo seu vértice. Considerando o plano α e o cone, podemos obter uma parábola se o plano α é paralelo à geratriz g da superfície cônica (veja figura 3 (a)). A hipérbole ocorre se o plano α é oblíquo à reta e intercepta as duas folhas da superfície cônica; essa secção é conhecida por seus dois ramos (veja figura 3 (c)). A elipse ocorre se o plano α é oblíquo à reta s, mas corta apenas uma das folhas da superfície cônica (veja figura 3 (b)). E a circunferência acontece caso o plano corte perpendicularmente a reta s em apenas uma das folhas da superfície cônica. Esta, por sua vez, consideraremos como um caso particular da Elipse.

Figura 2 – Cônicas Degeneradas



Fonte: Winterle (2000), adaptado pelo autor

Figura 3 – Cônicas não degeneradas



Fonte: Winterle (2000), adaptado pelo autor

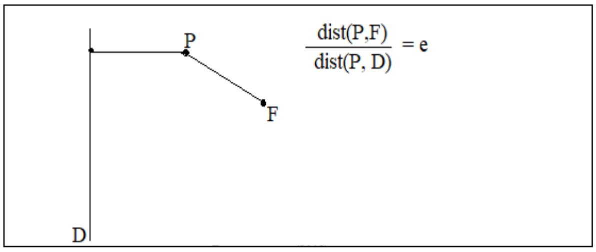
Na próxima seção, iniciaremos a definição de uma cônica como lugar geométrico e provaremos a Equação Geral das Cônicas.

2.1 Definição algébrica de cônica

Definição 1: Seja D uma reta fixa e F um ponto fixo não pertencente à referida reta. Seja P um ponto que se move no plano sem coincidir com o ponto F ou pertencer à reta D de tal forma que a razão entre a distância de P à F (dist(P,F)) e a distância de P à D (dist(P,D)) seja constante. Veja a figura 4:

- O ponto P define o lugar geométrico denominado de seção cônica.
- A reta fixa D é a diretriz.
- O ponto fixo F é o foco.
- A constante positiva representada por e é a excentricidade, um parâmetro associado à cônica que mede o desvio desta cônica em relação a uma circunferência

Figura 4 – Cônica: lugar geométrico



Fonte: O autor (2019)

Deste modo, o ponto P pertence à cônica com foco F, diretriz D e excentricidade e, se, e somente se,

$$\frac{dist(F,P)}{dist(P,D)} = e \qquad (1)$$

Para o caso geral em que $F = (x_0, y_0)$, $P = (x, y)$, $D: ax + by + c = 0$ e e é uma constante positiva, tem-se:

$$\frac{dist(F,P)}{dist(P,D)} = \frac{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}}{\frac{|ax+by+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}} = e \qquad (2)$$

Assim, elevando ambos os membros da equação (2) ao quadrado, temos:

$$\left(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}\right)^2 = \left(e\frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2$$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = e^2\frac{[|ax + by + c|]^2}{a^2 + b^2}$$

Fazendo $k^2 = \frac{e^2}{a^2 + b^2}$

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = k^2\,[|ax + by + c|]^2 = (akx + bky + ck)^2$$

Chamando $l = ak$, $m = bke$ e $n = ck$, temos a equação focal das cônicas:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (lx + my - n)^2 = 0 \qquad (3)$$

Em que x_0 e y_0 são as coordenadas do foco e $lx + my - n$ é a equação da diretriz.

Seguindo da equação (3), desenvolvendo os quadrados e associando os termos, temos:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (lx + my - n)^2 = 0$$

$$x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 - 2yy_0 + y_0^2 - [(lx + my)^2 - 2(lx + my)n + n^2] = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 - [l^2x^2 + 2lxmy + m^2y^2 - 2nlx + n^2] = 0,$$

$$x^2 + y^2 - l^2x^2 - 2lxmy - m^2y^2 + 2nlx + 2mny - n^2 - 2xx_0 - 2yy_0 + x_0^2 + y_0^2 = 0,$$

$$x^2(1 - l^2) + xy(-2lm) + y^2(1 - m^2) + 2x(nl - x_0) + 2y(mn - y_0) + (x_0^2 + y_0^2 - n^2) = 0.$$

Fazendo, $A = 1 - l^2$, $B = 1 - m^2$, $C = -2lm$, $D = -2(ln - x_0)$, $E = -2(mn - y_0)$ e $F = (x_0^2 + y_0^2 - n^2)$, obtemos a Equação Geral das Cônicas:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = 0 \qquad (4)$$

Variando o valor das variáveis A, B, C, D, E e F é possível obter retas, ponto, elipse, parábola, hipérbole e o conjunto vazio. Vale destacar que:

- Se $B^2 - 4AC < 0$, tem-se uma elipse;
- Se $B^2 - 4AC = 0$, tem-se uma parábola;
- Se $B^2 - 4AC > 0$, tem-se uma hipérbole.

E, ainda,

- Se $C = 0$, a diretriz D da cônica é paralela a um dos eixos x ou y.
- Se $F = 0$, temos que a cônica passa pela origem uma vez que o ponto $P(0,0)$ satisfaz a equação (4).

De acordo com a **Definição 1**, é possível mostrar que uma cônica é uma elipse, parábola ou hipérbole contanto que sua excentricidade seja positiva e que seu foco não esteja situado sobre sua diretriz. Como descreve o Teorema das Cônicas citado em Munem e Foulis (2015).

Teorema das Cônicas: Suponha que uma cônica com o foco na origem e a diretriz $D: x = -d$ tenha excentricidade e, onde e e d são positivos. Então, exatamente uma das alternativas a seguir é válida:

Caso 1: $e < 1$ e a cônica é uma elipse com equação:

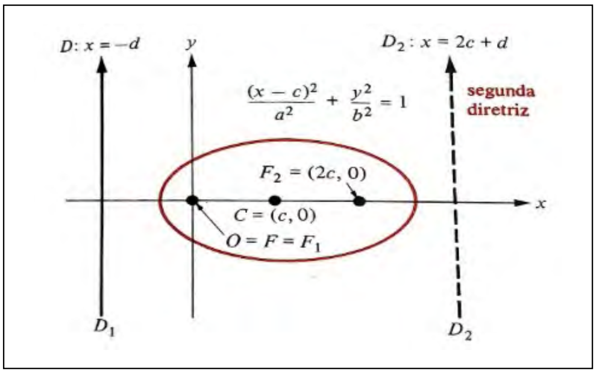
$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Em que:

$$a = \frac{ed}{1-e^2}, \mathrm{b} = \frac{ed}{\sqrt{1-e^2}} \; e \;\; c = \sqrt{a^2 - b^2 = ae}.$$

Considere a elipse apresentada a figura 5:

Figura 5 – Elipse com eixo maior igual a Ox



Fonte: Munem e Foulis (2015)

$$\frac{dist(P,F)}{dist(P,d)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{|x+d|}{\sqrt{1^2+0^2}}} = e < 1$$

$$\sqrt{x^2+y^2} = e\,|x+d|$$

Elevando ambos os membros ao quadrado:

$$x^2 + y^2 = e^2(x^2 + 2dx + d^2),$$

$$x^2 + y^2 - e^2x^2 - 2de^2x = e^2d^2\,,$$

$$(1-e^2)x^2 - 2de^2x + y^2 = e^2d^2.$$

Como $0 < e < 1$ temos $(1 - e^2) \neq 0$, então, podemos dividir a equação anterior por $(1 - e^2)$.

$$x^2 - 2\frac{de^2}{(1-e^2)}x + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)}$$

Completando o quadrado em x, somando em ambos os membros da equação o termo $\left(\frac{de^2}{(1-e^2)}\right)^2$.

$$\left(x - \frac{de^2}{(1-e^2)}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)} + \left(\frac{de^2}{(1-e^2)}\right)^2,$$

$$\left(x - \frac{de^2}{(1-e^2)}\right)^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}.$$

Dividindo ambos os lados da equação por $\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} \neq 0$.

$$\frac{\left(x - \frac{de^2}{(1-e^2)}\right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\frac{y^2}{(1-e^2)}}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} = 1,$$

$$\frac{\left(x - \frac{de^2}{(1-e^2)}\right)^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{(\sqrt{(1-e^2)})^2}} = 1$$

Se chamarmos $a = \frac{ed}{(1-e^2)}$, $b = \frac{e^2d^2}{(\sqrt{(1-e^2)})^2}$ e $c = ea$, temos:

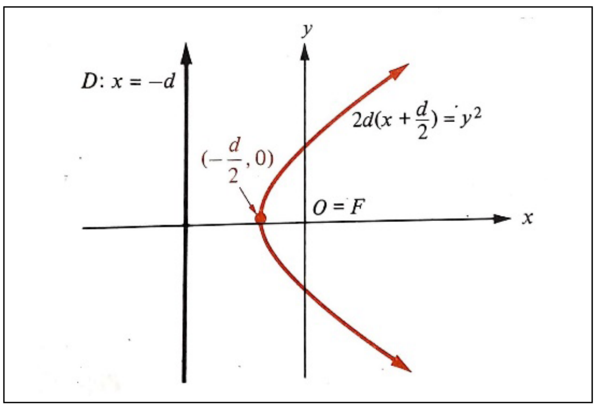
$$\frac{(x-c)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Caso 2: $e = 1$ e a cônica é uma parábola com equação:

$$4p(x+p) = y^2, \text{onde } p = \frac{d}{2}.$$

Considere a parábola apresentada na figura 6:

Figura 6 – Parábola com eixo de simetria Ox



Fonte: Munem e Foulis (2015)

$$\frac{dist(P,F)}{dist(P,d)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{|x+d|}{\sqrt{1^2+0^2}}} = 1.$$
$$x^2+y^2 = x^2+2dx+d^2,$$
$$y^2 = 2dx+d^2,$$
$$y^2 = 2d\left(x+\frac{d}{2}\right),$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = |x+d|.$$
$$y^2 = 4p(x+p).$$

Caso 3: $e > 1$ e a cônica é uma hipérbole com equação:

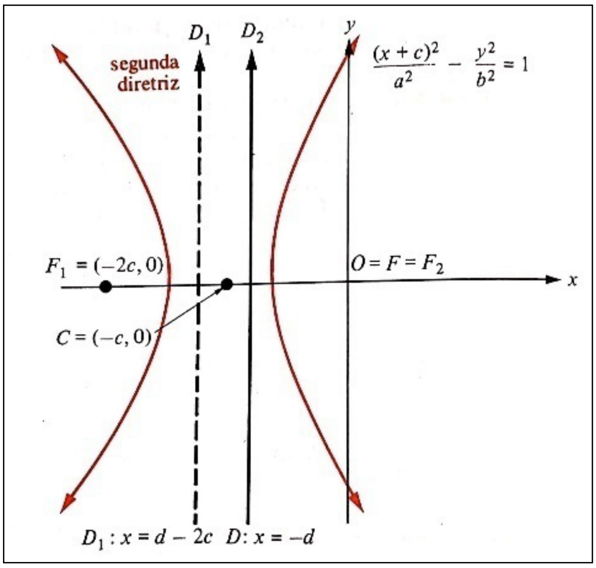
$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Em que

$$a = \frac{ed}{e^2-1}, b = \frac{ed}{\sqrt{e^2-1}}, e\ c = \sqrt{a^2+b^2} = ae.$$

Considere a hipérbole apresentada na figura 7:

Figura 7 – Hipérbole com eixo focal Ox



Fonte: Munem e Foulis (2015)

$$\frac{dist(P,F)}{dist(P,d)} = \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\frac{|x+d|}{\sqrt{1^2+0^2}}} = e > 1.$$
$$\sqrt{x^2+y^2} = e|x+d|.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado,

$$x^2+y^2 = e^2(x^2+2dx+d^2),$$
$$x^2+y^2-e^2x^2-2de^2x = e^2d^2,$$
$$(1-e^2)x^2-2de^2x+y^2 = e^2d^2.$$

Como $e > 1$ temos $(1-e^2) \neq 0$, então podemos dividir a equação acima por $(1-e^2)$.

$$x^2 - 2\frac{de^2}{(1-e^2)}x + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)}$$

Completando o quadrado em x, e somando o termo $(\frac{de^2}{(1-e^2)})^2$ a ambos os lados da equação:

$$(x-\frac{de^2}{(1-e^2)})^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)} + (\frac{de^2}{(1-e^2)})^2,$$

$$(x-\frac{de^2}{(1-e^2)})^2 + \frac{y^2}{(1-e^2)} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}.$$

Dividindo ambos os lados da equação por $\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} \neq 0$.

$$\frac{(x-\frac{de^2}{(1-e^2)})^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{\frac{y^2}{(1-e^2)}}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} = 1,$$
$$\frac{(x-\frac{de^2}{(1-e^2)^2})^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)}} = 1$$

Note que, no caso da hipérbole ,

$$1-e^2 = -|1-e^2| = -(\sqrt{(1-e^2})^2$$

sendo assim:

$$\frac{(x-\frac{de^2}{(1-e^2)^2})^2}{\frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\frac{e^2d^2}{\sqrt{(1-e^2)}}} = 1$$

Se chamarmos $a = \frac{ed}{(1-e^2)}$, $b = \frac{ed}{\sqrt{(1-e^2)}}$, $c = \sqrt{a^2+b^2} = ae$, temos:

$$\frac{(x-c)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

O Teorema das Cônicas apresenta o desenvolvimento das equações das cônicas não degeneradas em função da definição geométrica destas cônicas, sempre levando em consideração o valor da excentricidade e. Existem outras formas de desenvolver a equação geral de cada uma destas cônicas sem considerar a excentricidade que podem ser encontradas no trabalho de conclusão de curso da especialização "Cônicas não degeneradas: dedução de equações" (Sousa, 2020). Com base na equação geral, podem ser determinadas as demais equações (polar, rotacionada e paramétricas) de cada uma destas cônicas. Aqui vamos apresentar o desenvolvimento das equações polares das cônicas não degeneradas, que é uma das contribuições do TCC de SOUSA (2020).

3 Metodologia da pesquisa

Segundo o que afirma Gerhardt e Silveira (2009) sobre metodologia de pesquisa, este trabalho se apresenta como uma pesquisa que tem uma abordagem qualitativa, pois se preocupa com o aprofundamento da compreensão de um conceito, e é de natureza básica, já que objetiva gerar conhecimentos úteis para o avanço da ciência sem uma aplicação prática prevista. É de cunho exploratório do qual foi feito um procedimento de revisão bibliográfica. Para o procedimento de revisão bibliográfica, tomamos como base, além dos livros comumente utilizados nas disciplinas de Álgebra Vetorial e Cálculo Vetorial e Cálculo Diferencial e Integral e História da Matemática, uma busca sistemática em dois momentos: primeiro, utilizando as palavras CÔNICAS, PARÁBOLA, HIPÉRBOLE, ELIPSE e, em um segundo momento, para cada uma das cônicas não degenerada, em separado, utilizando "NOME DA CONICA", FÓRMULA, POLAR, GERAL, ROTAÇÃO, TRANSLAÇÃO, EXCENTRICIDADE. Cada conjunto de palavras combinados com "OU" e "E" por vez. Para tal, usamos três bases de dados de trabalhos acadêmicos: Google Academic, Siello e Portal da Capes. Assim, reunimos todas as equações encontradas, estudamos detalhadamente a demonstração de cada uma delas e a que não encontramos demonstradas desenvolvemos suas demonstrações.

4 Resultados da pesquisa

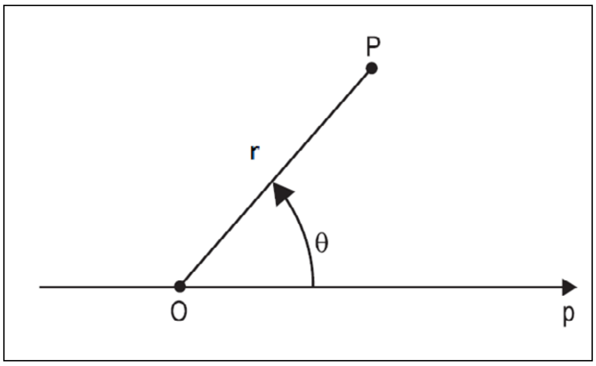
Cada tópico desta seção trata das demonstrações das equações polares de cada cônica não degenerada. Além disso, na subseção 4.1.2.1, podemos encontrar a demonstração da equação polar para o caso particular da elipse em que sua excentricidade é igual a zero, ou seja, a circunferência.

4.1 Equação das cônicas em coordenadas polares

4.1.1 Conversão do Sistema Cartesiano e Sistema Polar

No espaço bidimensional ($\mathbb{R}^2$), o sistema polar (SP) é caracterizado por uma reta orientada p e um ponto O pertencente a essa reta (veja figura 8). O ponto P, neste sistema, é representado por suas coordenadas polares: r, que é a distância do ponto a origem do eixo polar, e θ, que é o ângulo entre r e o eixo polar.

Figura 8 – Sistema Polar



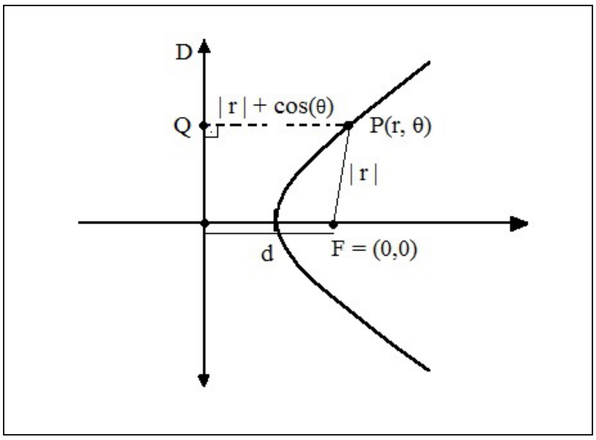
Fonte: Venturi (2003)

Assim, um ponto $P(x,y)$ do sistema cartesiano é representado por $P(r,\theta)$ no SP. E a relação entre os sistemas é dada por: $x=r\cos(\theta)$ e $y=r\,sen(\theta)$ com $\tan(\theta) = \frac{y}{x}$ e $r = \sqrt{x^2+y^2}$.

4.1.2 Equação polar das cônicas não degeneradas em relação à excentricidade.

À seguir, é demonstrada a equação polar de uma cônica em relação a sua excentricidade. Essa equação pode ser encontrada em Munem e Foulis (2015), entretanto não é apresentada com o mesmo nível de detalhes que é apresentado aqui. Considere uma cônica com foco F no polo O e a diretriz D perpendicular ao eixo polar, distante $d > 0$ unidades para a esquerda do polo, conforme pode ser visto na figura 9.

Figura 9 – Parábola em Coordenadas Polares



Fonte: Munem e Foulis (2015), adaptado pelo autor

Seja $P(r,\theta)$ do plano e seja Q o pé da perpendicular de P à D. Considerando a figura 9, em coordenadas cartesianas, temos:

- $P(x,y)$,
- $Q(-d,y)$,
- $x=r\cos\theta$,
- $y=rsen\theta$.
- $dist\ (P,Q)=|d+x|=|d+r\cos\theta|$,
- $|dist(P,F)| = \sqrt{x^2 + y^2} = |r|.$

Pela **definição 1** de cônica, temos:

$$\frac{dist\ (P,F)}{dist\ (P,Q)} = e.$$

Assim:

$$\frac{|r|}{|d + r\cos\,\theta|} = e.$$

Ou seja:

$$\frac{\pm r}{d + r\cos\theta} = e \quad ou \quad \left|\frac{r}{d + r\cos\theta}\right| = e.$$

Considerando o caso em que $r > 0$, devemos ter:

$$\frac{|r|}{|d + r\cos\,\theta|} = e,$$

$$\begin{aligned} r &= ed + er\cos\theta, \\ r - er\cos\theta &= ed, \\ r(1 - e\cos\theta) &= ed, \\ r &= \frac{ed}{(1 - e\cos\theta)} \end{aligned} \tag{5}$$

Observações

- Observe que se $P = (r_1, \theta_1)$, então, satisfaz a equação:

$$\frac{-r}{d + r\cos\theta} = e.$$

- E se $P = (-r_1, \theta_1 + \pi)$, então, satisfaz a equação:

$$\frac{r}{d + r\cos\theta} = e.$$

- Se o foco F permanecer no polo, mas a diretriz estiver à direita do foco e perpendicular ao eixo polar, então, a equação da cônica se torna:

$$r = \frac{ed}{1 + e\cos\theta}$$

- Se a diretriz estiver paralela e acima do eixo polar, a equação se torna:

$$r = \frac{ed}{(1 + esen\theta)},$$

- Se a diretriz estiver paralela e abaixo do eixo polar, temos:

$$r = \frac{ed}{(1 - esen\theta)}$$

Conforme o valor da excentricidade, é possível identificar a cônica, se:

$$\begin{cases} e > 1 & \text{Hipérbole} \\ e = 1 & \text{Parábola} \\ e < 1 & \text{Elípse} \end{cases}$$

Portanto, na equação (5), em r é dado em função de θ, determina várias informações a respeito da cônica que é determinada pelo valor da excentricidade e. A posição da diretriz da cônica perpendicular ou paralela em relação ao eixo polar é definida respectivamente pelo uso função seno ou cosseno. E o sinal de menos ou mais no denominador acima ou abaixo ou ainda à esquerda ou à direita conforme a posição da diretriz, segundo apresentado no quadro 1.

Nas seções a seguir, apresentamos deduções da equação a partir das substituições diretas apresentadas na subseção 4.1.1

Quadro1– Equações com respeito à excentricidade

Diretriz	Perpendicular		Paralela
Direita	$\frac{ed}{1+ecos\theta}$	Acima	$\frac{ed}{(1+esen\theta)}$
Esquerda	$\frac{ed}{1-ecos\theta}$	Abaixo	$\frac{ed}{(1-esen\theta)}$

Fonte: O autor (2020)

4.1.3 Equação polar da parábola

1° Caso: Parábola com centro na origem e eixo de simetria Ox.

Tomando a parábola de equação:

$$x^2=2py\,,$$

em que é o parâmetro, ou seja, a distância do foco à diretriz, então, a equação da parábola em coordenadas polares passa a ser:

$$\begin{gathered}(rcos\theta)^2 = 2prsen\theta\\ r^2cos^2\theta = 2prsen\theta\\ rcos\theta = \frac{2prsen\theta}{rcos\theta}\\ rcos\theta = 2ptan\theta\\ \\ r = \frac{2psen\theta}{cos^2\theta}.\end{gathered} \tag{6}$$

A equação (6) é a equação polar da parábola.

2° Caso: Parábola com centro na origem e eixo de simetria Oy.

Analogamente, para $y^2=2px$, temos:

$$r^2sen^2\theta = 2prcos\theta.$$

Dividindo ambos os membros da equação por $rsen^2$ temos:

$$\begin{gathered}\frac{r^2sen^2\theta}{rsen^2\theta} = \frac{2prcos\theta}{rsen^2\theta}\\ r = \frac{2pcos\theta}{sen^2\theta}\end{gathered} \tag{7}$$

3° Caso: Parábola com centro fora da origem do sistema de coordenadas e eixo de simetria paralelo a Ox.

Quando o centro da parábola está fora da origem e o eixo de simetria é paralelo ao eixo Ox, as equações polares da parábola passam a ser:

$$\begin{gathered}(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0)\\ (rcos\theta - x_0)^2 = 2p(r\,sen\theta - y_0)\end{gathered} \tag{8}$$

4° Caso: Parábola com centro fora da origem do sistema de coordenadas e eixo de simetria paralelo a Oy.

Já se o eixo de simetria for paralelo ao eixo Oy, a equação da parábola em coordenadas polares será:

$$\begin{gathered}(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)\\ (rsen\theta - y_0)^2 = 2p(r\,cos\theta - x_0)\end{gathered} \tag{9}$$

4.1.4 Equação polar da elipse

1 ° Caso: Considere a elipse com centro na origem e eixo maior coincidente com o eixo *Ox* de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$\begin{gathered}\frac{(rcos\theta)^2}{a^2} + \frac{(rsen\theta)^2}{b^2} = 1,\\ \frac{r^2cos^2\theta}{a^2} + \frac{r^2sen^2\theta}{b^2} = 1.\end{gathered}$$

Calculando o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, obtemos:

$$\frac{b^2(r^2cos^2\theta) + a^2(r^2sen^2\theta)}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2},$$

$$r^2(b^2cos^2\theta + a^2sen^2\theta) = a^2b^2, \qquad (10)$$

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{(b^2cos^2\theta + a^2sen^2\theta)}$$

Assim, a equação (10) é a equação polar da elipse para o caso em que o eixo maior é coincidente com o eixo Ox.

2° Caso: Considere a elipse com centro na origem e eixo maior coincidente com o eixo *Oy* de equação:

$$\frac{y^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Procedendo analogamente ao primeiro caso, encontramos a seguinte equação polar da elipse:

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{(b^2sen^2\theta + a^2cos^2\theta)} \qquad (11)$$

3° Caso: Elipse com centro $C(x_0,y_0)$ em que o eixo maior é paralelo ao eixo Ox, de equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(rcos\theta - x_0)^2}{a^2} + \frac{(rsen\theta - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Calculando o mínimo múltiplo comum entre os denominadores em ambos os membros da equação e fazendo os algebrismos necessários, temos:

$$\frac{b^2(rcos\theta - x_0)^2 + a^2(rsen\theta - y_0)^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2},$$

$$b^2(r^2cos^2\theta - 2x_0rcos\theta + x_0^2) + a^2(r^2sen^2\theta - 2y_0rsen\theta + y) = a^2b^2. \qquad (12)$$

A equação (12) é a equação da elipse de eixo maior paralelo ao eixo Ox.

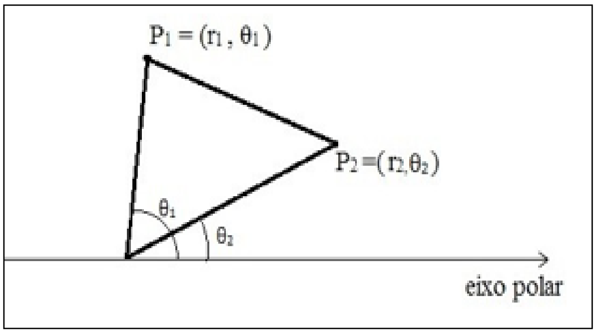
4° Caso: Elipse com centro $C(x_0,y_0)$ em que o eixo maior é paralelo ao eixo Ox. Situação análoga ao Caso 3.

4.1.4.1 Equação polar da circunferência

Temos ainda o caso particular da elipse em que sua excentricidade é igual a 0. Para essa cônica, dá-se o nome de circunferência. Parte desta demonstração é encontrada em Munem e Foulis (2015).

Considere dois pontos quaisquer no sistema de coordenadas polares, como mostra a Figura 10:

Figura 10 – Distância entre dois pontos em coordenadas polares



Fonte: O autor(2019)

Tomando $x=cos\theta$ e $y=sen\theta$. Fazendo $x_1=r_1\ cos\theta_1$, $y_1=r_1\ sen\theta_1$ e $x_2=r_2\ cos\theta_2$, $y_2=r_2\ sen\theta_2$, devemos ter, calculando a distância entre os pontos P_1 e P_2:

$$dist(P_1,P_2) = \sqrt{(r_1cos\theta_1 - r_2cos\theta_2)^2 + (r_1sen\theta_1 - r_2sen\theta_2)^2},$$

$$dist(P_1,P_2) = \sqrt{\begin{array}{l} r_1^2cos^2\theta_1 - 2r_1r_2cos\theta_1cos\theta_2 + r_2^2cos^2\theta_2 \\ + r_1^2sen^2\theta_1 - 2r_1r_2sen\theta_1sen\theta_2 + r_2^2sen^2\theta_2 \end{array}},$$

$$dist(P_1,P_2) = \sqrt{\begin{array}{l} r_1^2(cos^2\theta_1 + sen^2\theta_1) + r_2^2(cos^2\theta_2 + sen^2\theta_2 \\ -2r_1r_2(cos\theta_1cos\theta_2 + sen\theta_1sen\theta_2) \end{array}}$$

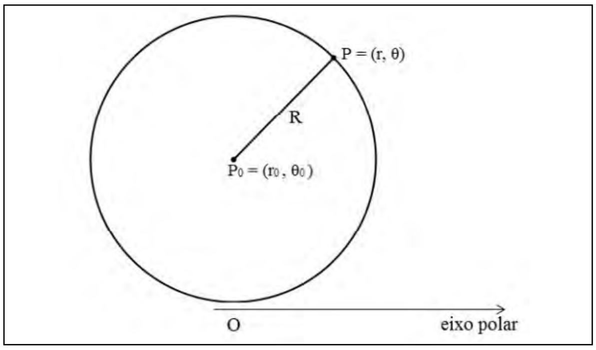
$$dist(P_1,P_2) = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

Sabendo que $cos^2\theta+sen^2\theta=1$ e $cos\theta_1\ cos\theta_2+sen\theta_1\ sen\theta_2= cos\theta_1\text{-}\theta_2$, temos:

$$dist(P,P_0) = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0rcos(\theta_0 - \theta)}. \qquad (13)$$

A equação (13) representa a distância entre dois pontos. Assim, dado um ponto $P_0 = (r_0, \theta_0)$ no centro e outro ponto $P = (r, \theta)$ pertencente à circunferência, como mostra a Figura 11, devemos ter:

Figura 11 – Circunferência em coordenadas Polares



Fonte: O autor (2019)

$$dist(P, P_0) = \sqrt{r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta_0 - \theta)}.$$

Como $dist(P,P_0) = R$ então:

$$R^2 = r_0^2 + r^2 - 2r_0 r\cos(\theta_0 - \theta) \qquad (14)$$

A equação (14) representa a circunferência em coordenadas polares.

4.1.5 Equação polar da hipérbole

1° Caso: Hipérbole com centro na origem e eixo focal coincidente com o eixo Ox de equação:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Calculando o mínimo múltiplo comum entre os denominadores, temos:

$$\frac{(rcos\theta)^2}{a^2} - \frac{(rsen\theta)^2}{b^2} = 1,$$
$$\frac{r^2cos^2\theta}{a^2} - \frac{r^2sen^2\theta}{b^2} = 1.$$
$$\frac{b^2(r^2cos^2\theta) - a^2(r^2sen^2\theta)}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}, \qquad (15)$$

$$r^2(b^2cos^2\theta - a^2sen^2\theta) = a^2b^2,$$

$$r^2 = \frac{a^2b^2}{(b^2cos^2\theta - a^2sen^2\ )}$$

2° Caso: Hipérbole com centro na origem e eixo focal coincidente com o eixo Oy de equação:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$
$$r^2 = \frac{a^2b^2}{(b^2sen^2\theta - a^2cos^2\theta)} \qquad (16)$$

3° Caso: Hipérbole com centro fora da origem e eixo focal paralelo ao eixo Ox de equação:

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{(rcos\theta - x_0)^2}{a^2} - \frac{(rsen\theta - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

Calculando o mínimo múltiplo comum e desenvolvendo os quadrados, devemos ter:

$$b^2(r^2cos^2\theta - 2x_0rcos\theta + x_0^2) - a^2(r^2sen^2\theta - 2y_0rsen\theta + y) = a^2b^2. \qquad (17)$$

4° Caso: É análogo ao caso 3.

5 Conclusão/Considerações

O estudo das cônicas tem início basicamente no ensino médio com a função polinomial do segundo grau e seu gráfico, em seguida com geometria analítica e segue no ensino superior com o estudo das cônicas geralmente dentro da disciplina de Álgebra ou Cálculo Vetorial. Em geral, esse assunto é encontrado dentro dos livros de Matemática (ensino médio do terceiro ano), Cálculo Vetorial e Cálculo Diferencial e Integral. Poucos são os livros que abordam as cônicas com a devida profundidade, a exemplo do livro de Jacir Venture (2003) e Gelson Iezzi (2019). Porém, encontramos muitas dissertações de mestrado, trabalhos de conclusão de curso (TCCs) e artigos que tratam de aplicações, estudos das características e construção das cônicas. Mas nenhum deles abordou as deduções das fórmulas. Basicamente, o que todos demonstram são as deduções das fórmulas gerais de cada cônica não degenerada, para o caso particular de centro na origem e eixos paralelos aos eixos cartesianos.

Apresentamos as equações polares porque estas parecem ser as mais negligenciadas. Alguns textos não abordam tais equações, outros apenas trazem a equação (5) por excentricidade, em geral, sem apresentar suas deduções. As equações por substituição diretas, como apresentadas nas seções 4.1.3 a 4.1.5, não foram encontradas na literatura pesquisada, talvez porque em algumas não seja possível fazer uma simplificação mais robusta e porque estas equações não se apresentem tão simples, sendo difícil de memorizá-las. Além do mais, para o entendimento destas demonstrações, faz-se necessário uma compreensão do conceito de coordenadas polares e da mudança de sistema do cartesiano para polar. Mas entendemos que estas dificuldades apresentam uma relevância, pois introduz novos saberes, principalmente no que cabe ao desenho destas cônicas em um sistema polar, variando o θ ou o *r*, que é muito útil para Matemáticos, Físicos e Engenheiros, e abre muitos caminhos, principalmente no que diz respeito ao cálculo de integrais triplas, além de desenvolver a habilidade de visão espacial. É interessante observar que qualquer pessoa que deseje estudar estas cônicas de forma mais profunda deve ter acesso a estas demonstrações.

Assim, sentimos a necessidade de produzir um trabalho que trate dessas equações com a devida importância, demonstrando-as para que os leitores consigam fazer um estudo mais amplo e completo. Ao longo deste trabalho, mostramos que é possível desenvolver todas as equações polares das cônicas não degeneradas, seja em relação à excentricidade, seja por substituição direta. Ressaltamos que aqui só apresentamos o caso em que as cônicas se encontram paralelo aos eixos cartesianos, o caso rotacionado foi estudado no TCC (SOUSA, 2020).

Vale salientar que este estudo não se esgota com a conclusão deste trabalho, pelo contrário, ele poderá servir para impulsionar novas pesquisas, pois é possível que haja outras formas de apresentar as cônicas às quais não tivemos acesso no decorrer desta produção. Sendo assim, cabe aos estudantes e professores de matemática buscarem novas referências que possibilitem abarcar novos conceitos e novas aplicações a fim de aprofundar ainda mais o estudo de cada curva.

REFERÊNCIAS

CONTADOR, P. R. M. **Matemática, uma breve história**. 5. ed. São Paulo: Livraria da Física, v. I, 2012.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2004.

GERHARDT, Tatiana Engel; SILVEIRA, Denise Tolfo (org.). **Métodos de Pesquisa**. 1. ed. Porto Alegre: Editora da UFRGS, 2009.

IEZZI, Gelson. **Fundamentos de Matemática elementar:** Geometria Analítica. 6. ed. São Paulo: Editora Saraiva, v. 7, 2019.

LAGO, Danielle Michaelsen. **Um estudo das cônicas** [manuscrito]. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade Federal de Goiás, Goiânia, 2017.

LOPES, Juracélio Ferreira. **Cônicas e Aplicações**. 2011. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", Rio Claro, 2011.

MONTEIRO, Rubens Marinho. **Resgate do teorema de Dandelin no estudo de cônicas com o Geogebra**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Centro de Ciências Exatas, Universidade Federal do Espírito Santo. Vitória, 2014.

MUNEM, Mustafa A.; FOULIS, David J. **Cálculo.** Tradução André Lima Cordeiro *et al*. Rio de Janeiro: LTC, v. 1, 2015. ISBN: 9788521610540.

NETO, Antônio Gomes Barbosa. **Um estudo sobre as cônicas e algumas aplicações** [manuscrito]. 2017. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Matemática) - Centro de Ciências e Tecnologias, Universidade Estadual da Paraíba. Campina Grande, 2017.

PEREIRA, Robson Edvaldo da Silva. Álgebra Linear: secções cônicas e aplicações. 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo..São Carlos, 2017.

PERES, Eduardo dos Santos. **Classificação de Cônicas e Quádricas em Função da Equação Algébrica**. 2014. Dissertação (Mestrado em Matemática) – Universidade Federal do Estado do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, 2014.

REIS, Genésio Limados; SILVA, Valdir Vilmar da. **Geometria Analítica**. 2. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

ROSI, Paolino Roberto. **Espelhos e seções cônicas** 2017. Dissertação (Mestrado em Matemática) –

Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2017.

SOUSA, Bárbara Kaline de. **Cônicas não degeneradas: dedução de equações**. Cajazeiras, 2020. 86 f.: il.

SOUZA, Núbia dos Santos de. **Curvas Cônicas:** do espaço ao plano da abstração ao registro visual numa perspectiva dinâmica. constituiu a Comissão de estudo e elaboração de proposta de programa de pesquisa e autoavaliação da pós-graduação lato sensu do IFPB 2016. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica) – Centro de Educação, Universidade Federal de Pernambuco. Recife, 2016.

STEINBRUCH, Alfredo; WINTERLE, Paulo. **Geometria Analítica**. 2. ed. São Paulo: Pearson Makron Books, 1987.

VENTURI, Jacir J. **Cônicas e Quádricas**. 5. ed. Curitiba, 2003.

WINTERLE, Paulo. **Vetores e Geometria Analítica**. São Paulo: Pearson Makron Books, 2000.