



# Análise do campo de temperatura e do número de Nusselt local na convecção forçada assimétrica de fluidos não-newtonianos

Dhiego Veloso<sup>[1]</sup>, Carlos Cabral<sup>[2]</sup>, Fábio Lima<sup>[3]</sup>

[1] dhiego\_vel@hotmail.com. Instituto Federal da Paraíba/ Núcleo de Ensino e Pesquisa em Física. [2] carloscabraisantos@yahoo.com.br. Universidade Federal da Paraíba/Laboratório de Energia Solar. [3] fabioarsp@gmail.com. Instituto Federal da Paraíba/ Laboratório de Automação Industrial.

## RESUMO

O presente trabalho visa analisar a transferência de calor em um escoamento no interior de um canal de placas planas paralelas, hidrodinamicamente desenvolvido e termicamente em desenvolvimento. Considera-se que as placas planas tenham propriedades termofísicas distintas entre si e que as mesmas estejam em contato com reservatórios térmicos com diferentes temperaturas, o que garante uma assimetria no problema estudado. O fluido escoante é considerado não-newtoniano do tipo lei de potência. A Técnica da Transformada Integral Clássica (CITT) foi utilizada para resolver a equação da energia. O campo de temperatura e os números de Nusselt local nas placas superior e inferior são avaliados para vários valores do índice lei de potência e do número de Biot. Os resultados obtidos foram confrontados com existentes na literatura aberta de forma a validar o modelo apresentado.

**Palavras-chave:** Placas planas. Assimetria. CITT. Campo de Temperatura. Nusselt.

## ABSTRACT

*The present work aims at analyzing the heat transfer in a flow inside a channel of parallel flat plates, hydrodynamically developed and thermally developing. It is considered that flat plates to have distincts thermophysical properties and that they are in contact with thermal reservoirs with different temperatures, in which guarantees an asymmetry in the problem studied. The flowing fluid is considered non-Newtonian of power law type. The Classical Integral Transformation Technique (CITT) was used to solve the energy equation. The temperature field and the local Nusselt numbers in the upper and lower plates are evaluated for several values of the power law index and the Biot number. The obtained results were confronted with existing ones in the open literature in order to validate the presented model.*

**Keywords:** Flat plates. Asymmetry. CITT. Temperature field. Nusselt.

## 1 Introdução

Com o grande avanço tecnológico da modernidade torna-se providencial um conhecimento aprofundado sobre os processos reais de transferência de calor, bem como surge uma necessidade de analisá-los quantitativamente. Tal avanço faz surgir, cada vez mais, problemas extremamente complexos na área de engenharia, requerendo soluções precisas em curto intervalo de tempo que proporcionem a otimização dos recursos empregados e que satisfaçam a necessidade do mercado. Dentro deste contexto, os métodos numéricos vêm ganhando força e conseguindo obter boas aproximações para as soluções pretendidas. Com o advento dos computadores de alta tecnologia, esses problemas, que na sua grande maioria não apresentam solução analítica, podem ser tratados por métodos de aproximação numérica que são bastante úteis nas aplicações de engenharia (Diniz, 2005). Devido à necessidade cada vez maior de soluções exatas em curto intervalo de tempo, as técnicas de aproximação numérica vêm ganhando espaço sobre a experimentação e aos métodos analíticos clássicos. Isto ocorre, pois a experimentação é quase sempre demorada, dispendiosa e os gastos com aquisição e aferição de equipamentos são enormes para cada nova situação, e os métodos analíticos clássicos apresentam certas limitações (Veronese *et al.*, 2012).

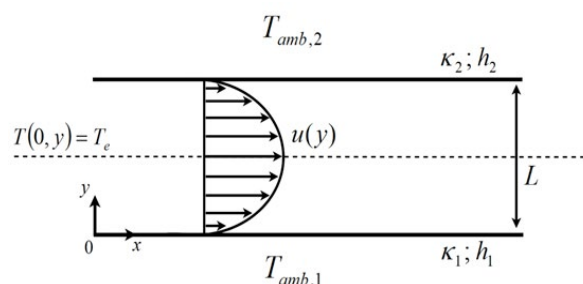
Tratando-se especificamente de problemas de difusão de calor e massa, a CITT se apresenta como uma metodologia consagrada tendo sido utilizada com sucesso em várias classes de modelos de transferência de calor e mecânica dos fluidos, conforme pode se observar em (Mikhailov e Özisik, 1984).

A transferência de calor na convecção forçada laminar de fluidos newtonianos ou não newtonianos na região de entrada térmica de dutos circulares e retangulares tem sido estudada tanto analiticamente como numericamente para as várias condições de contorno (Norris and Streid, 1940; Shah, 1975; Johnston, 1994; Chahub, 2011; Veronese *et al.*, 2012 and Assad *et al.*, 2018). Uma revisão bastante abrangente da literatura pode ser encontrada nos trabalhos de (Kakaç *et al.*, 2014; Shah e London, 2014 and Santos *et al.*, 2001).

O problema a ser estudado trata-se de um escoamento completamente desenvolvido de um fluido não-newtoniano do tipo lei de potência, no interior de um canal de placas planas paralelas,

sujeito as condições de contorno do 3º tipo (condição de Robin, devido a troca de calor com o meio), conforme ilustrado na Fig. 1. Pode-se verificar que as placas planas possuem condutividades térmicas diferentes e coeficientes de transferência de calor distintos, além de se observar que as mesmas estejam em contato térmico com ambientes que possuem diferentes temperaturas. Na literatura especializada, geralmente o sistema de referência é posto no centro do canal levando-se em consideração a condição de simetria no escoamento. Devido a assimetria imposta pelas considerações adotadas, no presente trabalho tomaremos o referencial na parede correspondente a placa inferior, o que nos possibilita analisar o problema do ponto de vista da assimetria, ou seja, condições de contorno distintas para as placas superior e inferior.

Figura 1 – Ilustração do problema



Os fluidos não newtonianos têm viscosidade variável em resposta à tensão cisalhante aplicada. Como exemplos pode-se citar suspensões de sólidos em líquidos, polímeros, emulsões, materiais em processamento com propriedades visco-elástico, borrachas, plásticos, fibras sintéticas, petróleo, detergente e sabão, fluidos biológicos e farmacêuticos, alimentos, operações no campo de óleos e de tintas (Assad *et al.*, 2018). O presente trabalho observa a influência da reologia do fluido sobre o desenvolvimento do campo de temperatura, além de observar a influência do número de Biot sobre os números de Nusselt local das placas superior e inferior.

A avaliação do número de Nusselt assume grande importância neste estudo, uma vez que o mesmo quantifica, para um fluido, a razão entre a transferência de calor por convecção e a transferência de calor por condução. Além disso, o número de Nusselt é uma grandeza bastante utilizada para a determinação do coeficiente de transferência de calor por convecção, também denominado de coeficiente de película ( $h$ ), que

exprime a potência térmica do fluido por unidades de área e temperatura. O estudo realizado no presente trabalho é de grande relevância, uma vez que visa fornecer parâmetros para melhor dimensionamento dos equipamentos térmicos, bem como proporcionar-lhes uma otimização energética no processo de transferência de calor.

## 2 Modelagem matemática

Para a modelagem matemática do problema físico proposto, foram feitas as seguintes considerações:

- Escoamento laminar, em regime permanente;
- Fluido incompressível;
- As propriedades físicas do fluido e das placas são consideradas constantes;
- O perfil de velocidade é completamente desenvolvido na entrada térmica;
- Os efeitos da dissipação viscosa não serão considerados;
- Impermeabilidade e não-deslizamento nas paredes;
- Desprezando as forças de corpo;
- Sem geração de energia interna;
- Gradiente de pressão uniforme na direção axial;
- Desprezando a difusão axial do fluido;
- O comprimento do canal é muito maior do que a sua altura.

Levando-se em conta as hipóteses simplificadoras mencionadas, as equações governantes do problema físico proposto assumem a forma:

### Equação da energia

$$\rho C_p u(y) \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = \kappa_f \frac{\partial^2 T(x, y)}{\partial y^2} \quad (1)$$

onde  $\rho$ ,  $C_p$  e  $\kappa_f$  representam, respectivamente, a massa específica, o calor específico a pressão constante e a condutividade térmica do fluido. O campo de velocidade, proposto no presente trabalho, para o escoamento completamente desenvolvido mencionado, resolvendo-se as equações de Navier-Stokes e considerando o não-deslizamento nas paredes, bem como o sistema de referência adotado, é dado por:

$$u(y) = \frac{2n+1}{n+1} u_m \left\{ 1 - \left[ 1 - 2 \left( \frac{y}{L} \right)^n \right]^{\frac{n+1}{n}} \right\}; 0 \leq y \leq L/2 \quad (2)$$

$$u(y) = \frac{2n+1}{n+1} u_m \left\{ 1 - \left[ 2 \left( \frac{y}{L} \right) - 1 \right]^{\frac{n+1}{n}} \right\}; L/2 \leq y \leq L \quad (3)$$

onde  $u_m$  corresponde a velocidade média do escoamento e  $n$  representa o índice lei de potência. Caso  $n=1$ , o fluido é newtoniano, se  $n>1$ , o fluido é dilatante e se  $n<1$ , o fluido é pseudoplástico.

### Condições de contorno

$$-\kappa_1 \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = h_1 [T(x, y) - T_{amb,1}]; \quad y = 0 \text{ e } x > 0 \quad (4)$$

$$-\kappa_2 \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = h_2 [T(x, y) - T_{amb,2}]; \quad y = L \text{ e } x > 0 \quad (5)$$

### Condição de entrada

$$T(x, y) = T_e \quad (6)$$

$$x = 0 \text{ e } 0 \leq y \leq L$$

## 2.1 Adimensionalização do problema

Para a análise do problema foram definidos os seguintes parâmetros adimensionais, dados pelas equações (7a-j), com o objetivo de se resolver não só um problema particular, mas uma classe de problemas que sejam definidos pelo mesmo modelo proposto.

$$X = \frac{\alpha x}{L^2 u_m}; \quad \zeta = \frac{y}{L}; \quad u(\zeta) = \frac{u(y)}{u_m} \quad (7a-c)$$

$$Bi_1 = \frac{h_1 L}{\kappa_1}; \quad Bi_2 = \frac{h_2 L}{\kappa_2}; \quad Pr = \frac{\nu}{\alpha} \quad (7d-f)$$

$$Re_h = \frac{D_h \cdot u_m}{\nu}, \quad Pe = Re_h \cdot Pr = \frac{D_h u_m}{\alpha} \quad (7g-h)$$

$$\Theta(X, \zeta) = \frac{T(x, y) - T_e}{T_e - T_a} ; \quad \Theta_2 = \frac{T_{amb,2} - T_{amb,1}}{T_e - T_{amb,1}} \quad (7i-j)$$

onde  $\nu$  é a viscosidade cinemática,  $\alpha$  é a difusividade térmica do fluido,  $\kappa_1$  é a condutividade térmica da placa inferior,  $\kappa_2$  é a condutividade térmica da placa superior,  $L$  é a distância entre as placas,  $D_h = 2.L$  é o diâmetro hidráulico,  $h_1$  corresponde ao coeficiente de transferência de calor da placa inferior,  $h_2$  é o coeficiente de transferência de calor da placa superior e  $Pr$ ,  $Re_h$  e  $Pe$  são, respectivamente, os números de Prandtl, Reynolds hidráulico e Peclet.

Aplicando os parâmetros adimensionais nas equações (1), (4), (5) e (6), encontra-se a equação principal, as condições de contorno e a condição de entrada na forma adimensionalizada:

### Equação principal adimensional

$$u(\zeta) \frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial X} = \frac{\partial^2 \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta^2} \quad (8)$$

### Condições de contorno adimensionais

$$\frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} + Bi_1 \cdot \Theta(X, \zeta) = 0 ; \zeta = 0 \text{ e } X > 0 \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Theta(X, \zeta)}{\partial \zeta} + Bi_2 \cdot \Theta(X, \zeta) = Bi_2 \cdot \Theta_2 ; \zeta = 1 \text{ e } X > 0 \quad (10)$$

### Condição de entrada adimensional

$$\Theta(X, \zeta) = 1, \quad 0 \leq \zeta \leq 1, \quad X = 0 \quad (11)$$

## 2.2 Aplicação de um filtro matemático

Após o processo de adimensionalização, a condição de contorno encontrada em  $\zeta = 1$  é não

homogênea, conforme eq. (10). Por este motivo, foi introduzido um filtro matemático com o objetivo de torná-la homogênea, para que a CITT seja aplicada de forma adequada, bem como melhore a performance computacional. O filtro matemático proposto será da forma:

$$\Theta(X, \zeta) = \Theta^*(X, \zeta) + \Theta_F(\zeta) \quad (12)$$

O filtro matemático introduzido é dado por:

$$\Theta_F(\zeta) = \frac{Bi_2 \cdot \Theta_2}{Bi_2 - Bi_1 Bi_2 - Bi_1} [1 - Bi_1 \cdot \zeta] \quad (13)$$

A CITT será aplicada em  $\Theta^*(X, \zeta)$ , onde será possível obter a sua solução. De posse da mesma, usaremos as equações (13) e (12) para encontrar a solução geral do problema físico proposto. Seguindo a metodologia da CITT devemos definir problemas auxiliares apropriados, bem como desenvolver um par transformada-inversa.

## 2.3 Problema auxiliar de autovalor na direção radial

O problema auxiliar para o campo de temperatura recai sobre o problema típico de Sturm-Liouville. O problema auxiliar de autovalor para a determinação do campo de temperatura é escrito da seguinte forma:

$$\frac{d^2 \Psi_i(\zeta)}{d\zeta^2} + \mu_i^2 u(\zeta) \Psi_i(\zeta) = 0 ; 0 \leq \zeta \leq 1 \quad (14)$$

$$\frac{d\Psi_i(\zeta)}{d\zeta} + Bi_1 \cdot \Psi_i(\zeta) = 0 ; \zeta = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d\Psi_i(\zeta)}{d\zeta} + Bi_2 \cdot \Psi_i(\zeta) = 0 ; \zeta = 1 \quad (16)$$

No presente trabalho utiliza-se o método da transformação integral para a determinação dos autovalores ( $\mu_i$ ), das autofunções,  $\Psi_i(\zeta)$ , e das normas ( $N_i$ ), conforme descrito por (Cotta, 1993). O método da transformação integral foi implementado no código computacional na plataforma Fortran INTEL para a solução do problema de autovalor associado.

## 2.4 Transformação Integral do Campo de Temperatura

Seguindo a metodologia de uso da CITT, definiremos um par transformada-inversa com a finalidade de reduzir o problema original, que se trata de uma equação diferencial parcial, num sistema infinito e acoplado de equações diferenciais ordinárias. Num segundo momento, a fórmula da inversa pode ser utilizada para obtenção da solução do problema original (Cotta, 1993 e 1998). O par transformada integral definido para este problema é dado por:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 u(\zeta) \cdot \Psi_i(\zeta) \Theta^*(X, \zeta) d\zeta \quad (17)$$

$$\Theta^*(X, \zeta) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\Psi_i(\zeta) \bar{\Theta}_i(X)}{N_i^{1/2}}, \text{ Inversa} \quad (18)$$

Aplicando operadores integrais na equação (8), com o auxílio do problema auxiliar e do par transformada-inversa pré-definidos, pode-se transformar a equação diferencial parcial, que rege o problema físico proposto, num sistema de equações diferenciais ordinárias dado por:

$$\frac{d\bar{\Theta}_i(X)}{dX} + \mu_i^2 \bar{\Theta}_i(X) = 0 \quad (19)$$

cuja solução geral é clássica, dada por:

$$\bar{\Theta}_i(X) = \bar{\Theta}_i(0) e^{-\mu_i^2 X} \quad (20)$$

Onde:

$$\bar{\Theta}_i(0) = \frac{1}{N_i^{1/2}} \int_0^1 u(\zeta) \cdot \Psi_i(\zeta) d\zeta = \bar{f}_i \quad (21)$$

A partir desta solução, podemos utilizar a fórmula da inversa, dada pela equação (18), para encontrar a solução geral do problema físico proposto. A temperatura média adimensional pode ser calculada por meio da expressão:

$$\Theta(X)_{av.} = \frac{\int_0^1 u(\zeta) \cdot \Theta(X, \zeta) d\zeta}{\int_0^1 u(\zeta) d\zeta} \quad (22)$$

Considerando  $Nu_1(X)$  o número de Nusselt Local na placa inferior, e  $Nu_2(X)$  o número de Nusselt Local na placa superior, temos que:

$$Nu_1(X) = - \left. \frac{2}{\Theta(X,0) - \Theta(X)_{av.}} \frac{d\Theta(X, \zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=0} \quad (23)$$

$$Nu_2(X) = - \left. \frac{2}{\Theta(X)_{av.} - \Theta(X,1)} \frac{d\Theta(X, \zeta)}{d\zeta} \right|_{\zeta=1} \quad (24)$$

## 3 Resultados

### 3.1 Validação dos resultados (Caso simétrico)

Para fins de *benchmarking* os resultados do presente trabalho foram confrontados com resultados encontrados na literatura especializada, particularmente em Shah (1975), Chalhub (2011) e Assad *et al.* (2018), mostrando a robustez e a eficácia da CITT na resolução do problema físico proposto. A comparação é feita para o caso clássico, onde leva-se em consideração a condição de simetria e põe o sistema de referência no centro do canal. Na Quadro (1) compara-se a temperatura média adimensional e o número de Nusselt local para o caso simétrico ( $Bi_1=Bi_2$  e  $\theta_2=0$ ) em que o fluido é considerado newtoniano ( $n=1$ ) e a temperatura é especificada nas paredes. Na Quadro (2) compara-se o número de Nusselt local para fluidos não-newtonianos com diferentes índices lei de potência e uma condição de contorno simétrica do 1º tipo, onde pode se verificar uma boa concordância com os resultados aqui apresentados.

**Quadro 1** – Comparação da temperatura média adimensional e do número de Nusselt local para um fluido newtoniano com temperatura prescrita nas paredes

$X^* = 4 \frac{a \cdot x}{L^2 \cdot u_m}$	Temperatura Média adimensional			Número de Nusselt Local			
	Shah (1975)	Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente trabalho	Shah (1975)	Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente trabalho $Nu_1(X)$	Presente trabalho $Nu_2(X)$
0.016	0.92774	0.92774	0.92774	12.822 10.545 9.5132	12.82173	12.82174	12.82174
0.032	0.88604	0.88604	0.88604		10.54481	10.54481	10.54481
0.048	0.85137	0.85137	0.85138		9.51325	9.51325	9.51325
0.064	0.82065	0.82065	0.82065	8.9100	8.90998	8.90999	8.90999
0.080	0.79258	0.79258	0.79258	8.5166	8.51664	8.51664	8.51664
0.096	0.76648	0.76648	0.76648	8.2456	8.24558	8.24558	8.24558
0.112	0.74191	0.74191	0.74191	8.0532	8.05322	8.05323	8.05323
0.128	0.71860	0.71860	0.71860	7.9146	7.91461	7.91461	7.91461
0.160	0.67503	0.67503	0.67503	7.7405	7.74050	7.74050	7.74050
1.600	0.04459	0.04459	0.04459	7.5407	7.54070	7.54070	7.54070

**Quadro 2** – Comparação do número de Nusselt local para fluidos não-newtonianos com temperatura prescrita nas paredes

X n	$X^* = 0.002$					$X^* = 0.02$				
	Chalhub (2011) FVM	Chalhub (2011) GITT	Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho $Nu_1(X)$	Presente Trabalho	Chalhub (2011) FVM	Chalhub (2011) GITT	Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho $Nu_2(X)$	Presente Trabalho
n=0.5	26.8448	26.8453	26.8448	26.8451	26.8451	12.9082	12.9082	12.9082	12.9082	12.9082
n=1.0	24.6882	24.6885	24.6882	24.6884	24.6884	12.0145	12.0145	12.0145	12.0145	12.0145
n=2.0	23.3941	23.3943	23.3941	23.3942	23.3942	11.4618	11.4618	11.4618	11.4618	11.4618
n=10	22.2101	22.2103	22.2101	22.2102	22.2102	10.9469	10.9469	10.9469	10.9469	10.9469
n=50	21.9535	21.9537	21.9535	21.9536	21.9536	10.8343	10.8343	10.8343	10.8343	10.8343
X n	$X^* = 0.2$					$X^* = 2$				
	Chalhub (2011) FVM	Chalhub (2011) GITT	Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho $Nu_1(X)$	Presente Trabalho $Nu_2(X)$	Chalhub (2011) FVM	Chalhub (2011) GITT	Assad <i>et al.</i> (2018)	Presente Trabalho $Nu_1(X)$	Presente Trabalho $Nu_2(X)$
n=0.5	8.04903	8.04903	8.04903	8.04903	8.04903	7.93976	7.93976	7.93976	7.93976	7.93976
n=1.0	7.63215	7.63215	7.63215	7.63215	7.63215	7.54070	7.54070	7.54070	7.54070	7.54070
n=2.0	7.35890	7.35890	7.35890	7.35890	7.35890	7.27790	7.27790	7.27790	7.27790	7.27790
n=10	7.09586	7.09586	7.09586	7.09586	7.09586	7.02415	7.02415	7.02415	7.02415	7.02415
n=50	7.03742	7.03742	7.03742	7.03742	7.03742	6.96769	6.96769	6.96769	6.96769	6.96769

Agora o desenvolvimento do campo de temperatura é analisado, explicitando o comprimento de entrada térmica para cada caso investigado. No presente trabalho definimos o comprimento de entrada térmica como o maior comprimento adimensional necessário para que o fluido atinja a sua temperatura final com uma margem de 10% de diferença relativa. As Figuras (2 – 4) mostram o desenvolvimento do campo térmico para o escoamento simétrico de um fluido não-newtoniano com temperatura constante nas paredes. Foram analisados três casos para o índice lei de potência ( $n= 0,25; 1$  e  $4$ ), que também foram estudados por Assad *et al.*(2018). Uma boa concordância pode ser percebida, conforme pode se verificar na Quadro 3.

Figura 2 – Campo térmico para  $n=0,25$ , explicitando o comprimento de desenvolvimento térmico

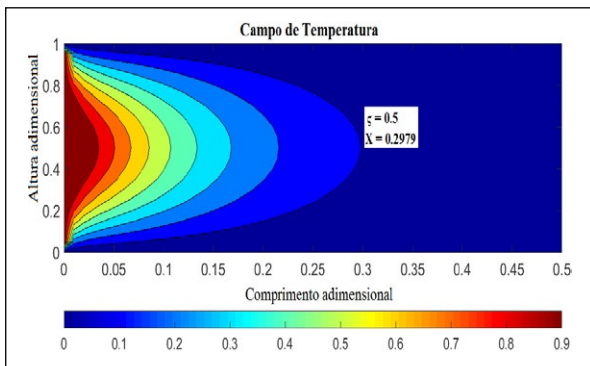


Figura 3 – Campo térmico para  $n=1$ , explicitando o comprimento de desenvolvimento térmico.

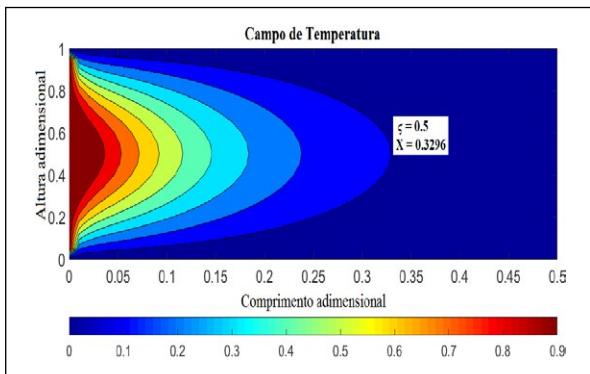
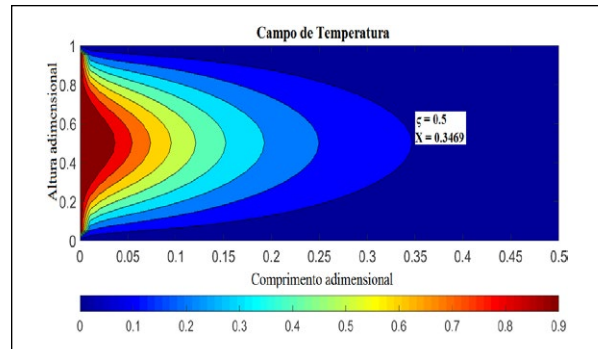


Figura 4 – Campo térmico para  $n=4$ , explicitando o comprimento de desenvolvimento térmico



Quadro 3 – Comparação do comprimento de desenvolvimento térmico para diferentes índices lei de potência

	$n=0,25$	$n=1$	$n=4$
Assad <i>et al.</i> (2018)	$L_{td,t} = 0,2965$	$L_{td,t} = 0,3295$	$L_{td,t} = 0,3465$
Presente Trabalho	$L_{td,t} = 0,2979$	$L_{td,t} = 0,3296$	$L_{td,t} = 0,3469$

### 3.2 Resultados Obtidos (Caso assimétrico)

Nesta seção analisa-se o caso em que o escoamento é assimétrico ( $Bi_1 \neq Bi_2$ ), avaliando a influência da consideração de assimetria sobre o desenvolvimento do campo de temperatura e sobre os números de Nusselt Local nas placas inferior e superior. Para todos os gráficos e Quadros contidos neste trabalho foram usados 200 autovalores e 200 autofunções correspondentes no problema auxiliar. Para todos os casos analisados a seguir considera-se que  $Bi_1 \rightarrow \infty$ , variando-se apenas os valores do número de Biot na placa superior ( $Bi_2$ ), os valores do índice lei de potência ( $n$ ) e os valores para a diferença de temperatura entre os ambientes em contato térmico com as placas ( $\theta_2$ ).

Nas Quadros 4 e 5 compara-se, para fluidos não-newtonianos com índices lei de potência iguais a 0,25; 1 e 4,  $\theta_2=0$ , e um número de Biot especificado na placa superior ( $Bi_2$ ), os valores dos números de Nusselt Local nas placas inferior e superior. É possível verificar valores distintos entre si, fruto da condição de assimetria. Também pode ser visto que à medida que o número de Biot aumenta, a diferença entre  $Nu_1(X)$  e  $Nu_2(X)$  diminui, tendendo assintoticamente a situação de simetria uma vez que  $Bi_1 \rightarrow \infty$  é fixado.

**Quadro 4** – Comparação dos números de Nusselt Local nas placas inferior e superior para  $Bi_2 = 15$  e  $\theta_2 = 0$

X n	X = 0.001		X = 0.01		X = 0.1		X = 1	
	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$
$n = 0.25$	23.6313	27.4204	11.2416	13.0358	7.7762	9.6056	7.73135	9.66144
$n = 1.00$	19.5778	22.1299	9.7347	10.8757	7.0764	8.3041	7.0475	8.3390
$n = 4.00$	18.0403	20.2030	9.09889	10.0359	6.74109	7.74274	6.72069	7.76665

**Quadro 5** – Comparação dos números de Nusselt Local nas placas inferior e superior para  $Bi_2 = 45$  e  $\theta_2 = 0$

X n	X = 0.001		X = 0.01		X = 0.1		X = 1	
	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$
$n = 0.25$	23.7444	26.6150	11.4353	12.1410	8.19127	8.81987	8.17603	8.82902
$n = 1.00$	19.6503	20.8582	9.8617	10.3032	7.36641	7.79058	7.35632	7.79736
$n = 4.00$	18.0998	19.1051	9.20357	9.56354	6.98129	7.32768	6.97408	7.33238

**Quadro 6** – Comparação dos números de Nusselt Local nas placas inferior e superior para  $Bi_2 = 15$  e  $\theta_2 = 0.1$

X n	X = 0.001		X = 0.01		X = 0.1		X = 1	
	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$
$n = 0.25$	23.6112	27.5267	11.17443	13.22375	7.41094	10.55953	4.03685	3.95696
$n = 1.00$	19.5628	22.1933	9.68377	10.9995	6.80177	8.93678	4.06333	3.92673
$n = 4.00$	18.0270	20.2540	9.05403	10.1390	6.50394	8.26068	4.07948	3.90776

**Quadro 7** – Comparação dos números de Nusselt Local nas placas inferior e superior para  $Bi_2 = 45$  e  $\theta_2 = 0.1$

X n	X = 0.001		X = 0.01		X = 0.1		X = 1	
	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$	$Nu_1(X)$	$Nu_2(X)$
$n = 0.25$	23.7127	25.6819	11.3464	12.2814	7.73438	9.58221	4.02173	3.97688
$n = 1.00$	19.6279	20.9007	9.79673	10.4002	7.03278	8.31354	4.04128	3.95598
$n = 4.00$	18.0805	19.1402	9.14721	9.64579	6.69694	7.76184	4.05414	3.94188

Nas Quadros 6 e 7 compara-se os valores do número de Nusselt local nas placas inferior e superior, para fluidos não-newtonianos com índices lei de potência iguais a 0.25; 1 e 4,  $\theta_2 = 0.1$ , e um número de Biot na placa superior ( $Bi_2$ ) especificado. Uma diferença de resultados pode ser verificada em relação aos casos apresentados nas Quadros 4 e 5, onde a convergência é estabelecida para o número de Nusselt local em torno do valor 4, conforme  $Bi_2$  aumenta.

Para uma análise mais detalhada da influência dos parâmetros sobre o campo térmico e os números de Nusselt nas placas superior e inferior, uma vez que o problema apresenta muitos parâmetros que interferem diretamente na solução, os resultados são divididos em três subseções, onde em cada uma delas considera-se constante um dos parâmetros e variam-se os demais. São elas: Influência do índice lei de potência, influência do número de Biot na placa superior e a influência da diferença de temperatura entre os ambientes em contato térmico com as placas.



### 3.2.1 Influência do índice lei de potência(n)

Neste ponto, o escopo volta-se para a influência do índice lei de potência sobre o desenvolvimento do campo de temperatura. Adota-se três índices lei de potência distintos ( $n=0.25$ ,  $n=1$  e  $n=4$ ) representando, respectivamente, fluidos pseudoplásticos, newtonianos e dilatantes. Para  $Bi_2 = 10$  e  $\theta_2=0.1$ , investiga-se a influência da reologia do fluido sobre a evolução do campo térmico.

Figura 5 – Campo térmico para  $n=0.25$ ,  $Bi_2 = 10$  e  $\theta_2=0.1$

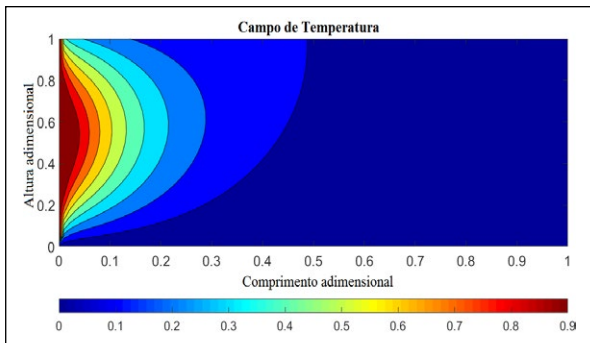


Figura 6 – Campo térmico para  $n=1$ ,  $Bi_2 = 10$  e  $\theta_2=0.1$

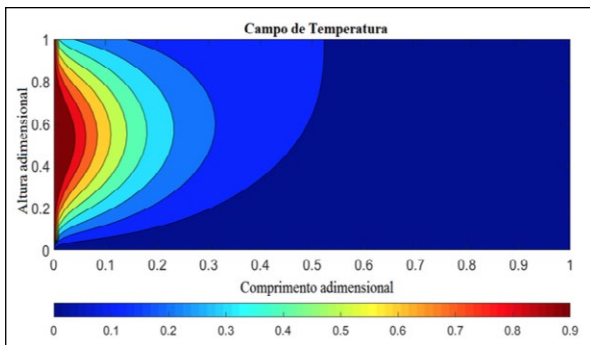
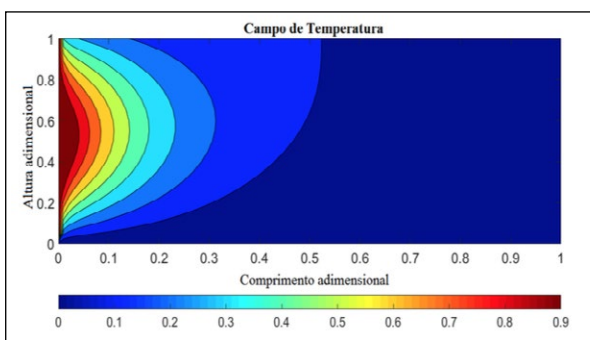


Figura 7 – Campo térmico para  $n=4$ ,  $Bi_2 = 10$  e  $\theta_2=0.1$



As Figuras 5-9 mostram que os resultados são diferentes quando diferentes índices de leis de potência são considerados. Através da figura 9 pode se verificar que o número de Nusselt converge para valores menores na proporção em que o índice lei de potência aumenta, e isso vale para o Nusselt na placa inferior e superior. Ainda nesta figura pode se observar que o número de Nusselt converge assintoticamente a uma curva comum, à medida que o  $n$  aumenta. Na figura 10, devido a diferença de temperatura entre as placas inferior e superior, é possível concluir que a convecção é desprezível na placa superior até um determinado comprimento adimensional a partir do qual o número de Nusselt ( $Nu_2$ ) começa a aumentar, convergindo para o valor 4 independente do  $n$ .

Figura 8 – Número de Nusselt para  $Bi_2 = 10$  e  $\theta_2=0$

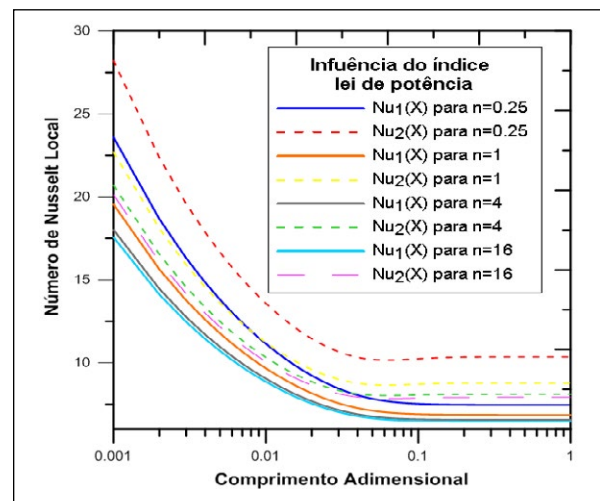
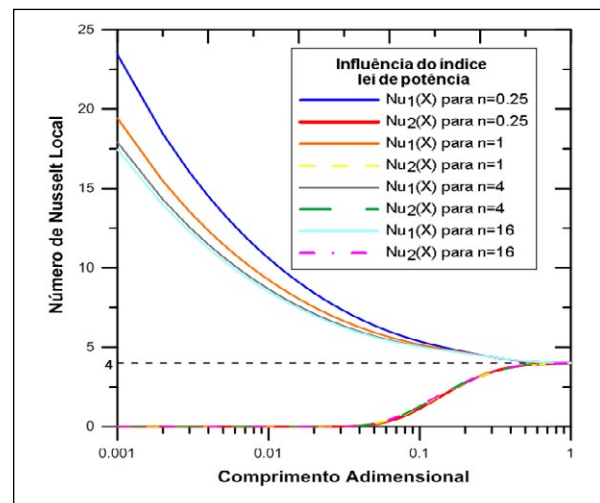


Figura 9 – Número de Nusselt para  $Bi_2 = 10$  e  $\theta_2=1$



### 3.2.2 Influência do número de Biot na placa superior ( $Bi_2$ )

Neste subitem discutir-se-á a influência do número de Biot na placa superior sobre o campo de temperatura. Para  $n=1$  e  $\theta_2=0.3$ , avalia-se o desenvolvimento do campo térmico para os casos em que  $Bi_2$  assume os valores 1,10 e 100, respectivamente. Nas figuras 10-12 é possível verificar que o campo de temperatura se desenvolve de formas distintas quando diferentes números de Biot ( $Bi_2$ ) são considerados, especialmente nas proximidades da placa superior.

Nas Figuras 13-14 percebe-se a influência do número de Biot ( $Bi_2$ ) sobre os números de Nusselt nas placas superior e inferior. A Figura 13 mostra que a diferença entre  $Nu_1(X)$  e  $Nu_2(X)$  diminui à medida que o número de Biot aumenta, em conformidade com o que foi apresentado e discutido nas Quadros 4-7. Na figura 14 ocorre, mais uma vez, já que  $\theta_2=1 \neq 0$ , uma convecção desprezível na placa superior até um determinado comprimento adimensional, a partir do qual a convecção passa a ocorrer e aumenta gradativamente.

Figura 10 – Campo térmico para  $Bi_2 = 1, n=1$  e  $\theta_2=0.3$

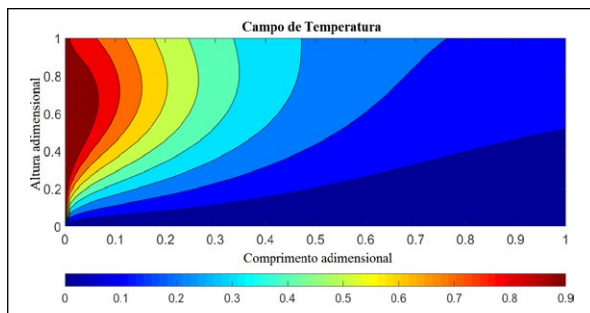


Figura 11 – Campo térmico para  $Bi_2 = 10, n=1$  e  $\theta_2=0.3$

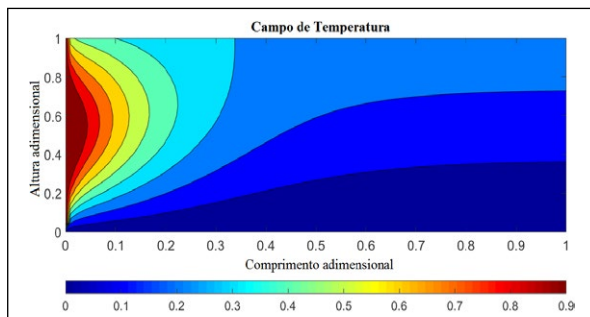


Figura 12 – Campo térmico para  $Bi_2 = 100, n=1$  e  $\theta_2=0.3$

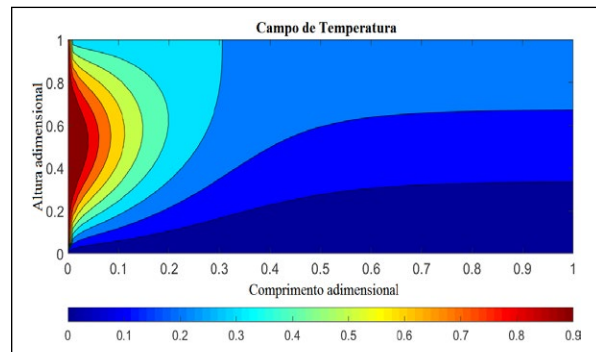


Figura 13 – Número de Nusselt para  $n=1$  e  $\theta_2=0$

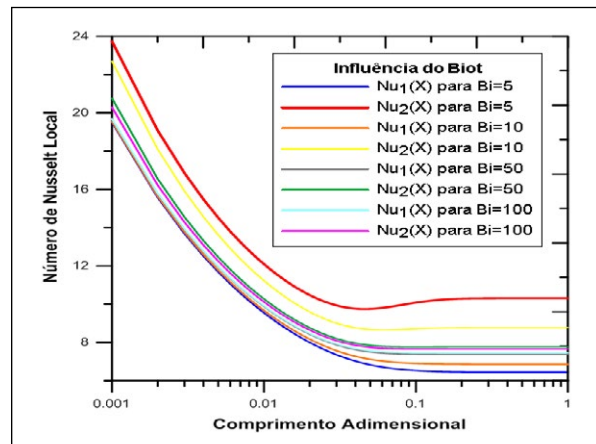
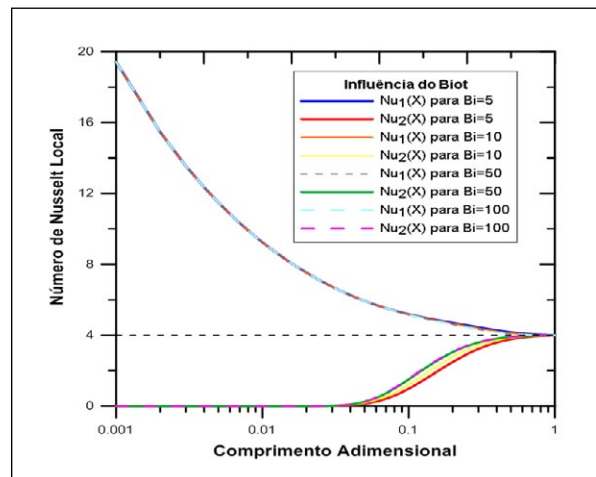


Figura 14 – Número de Nusselt para  $n=1$  e  $\theta_2=1$



1.1.1 Influência do  $\theta_2$

A seguir avalia-se o campo de temperatura para o caso em que  $n=1$ ,  $Bi_2 \rightarrow \infty$  e  $\theta_2$  assume os valores 0.4, 0.6, 0.8 e 1.0, respectivamente. Se faz mister observar que para Biot tendendo a infinito temos a condição de contorno do primeiro tipo, onde a temperatura da parede é especificada. Nos casos investigados a seguir, considera-se que  $Bi_1 \rightarrow \infty$  e  $Bi_2 \rightarrow \infty$ , o que implica que as duas paredes possuem temperatura constante. Pela adimensionalização, dada pela eq. (7i), verifica-se que a temperatura da placa inferior mantém-se constante e nula, enquanto que temperatura da parede superior, para os casos analisados, mantém-se constante assumindo os valores 0.4, 0.6, 0.8 e 1.0, respectivamente. Pode ser visto nas Figuras 15-18 que o campo de temperatura tende a se desenvolver de modo a estabelecer um gradiente uniforme na direção da altura adimensional, o que é fisicamente plausível considerando que cada subcamada infinitesimal está em equilíbrio térmico aproximado com subcamadas infinitesimais inferiores e superiores.

Figura 15 – Campo térmico para  $\theta_2 = 0.4$ ,  $n=1$  e  $Bi_2 \rightarrow \infty$

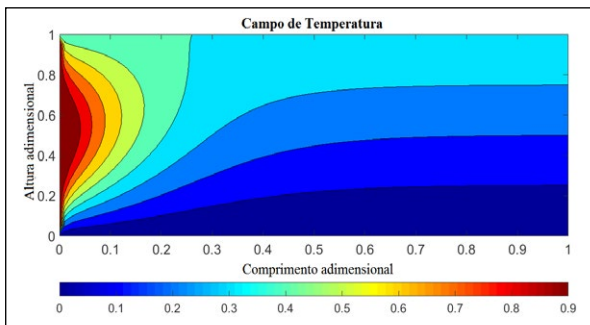


Figura 16 – Campo térmico para  $\theta_2 = 0.6$ ,  $n=1$  e  $Bi_2 \rightarrow \infty$

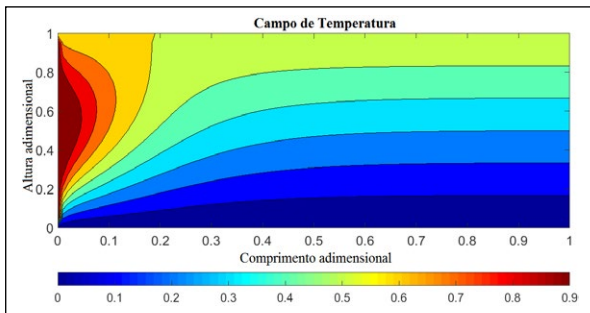


Figura 17 – Campo térmico para  $\theta_2 = 0.8$ ,  $n=1$  e  $Bi_2 \rightarrow \infty$

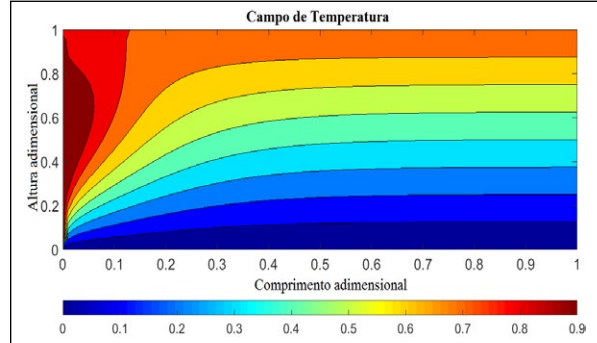
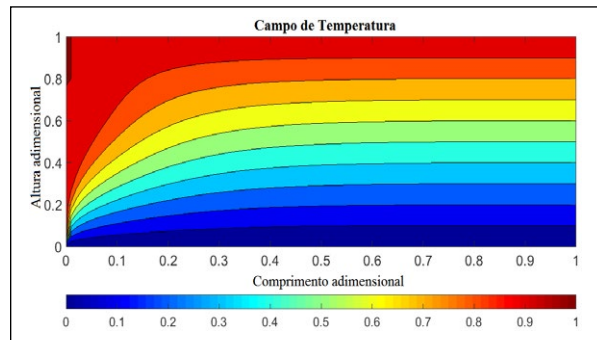


Figura 18 – Campo térmico para  $\theta_2 = 1.0$ ,  $n=1$  e  $Bi_2 \rightarrow \infty$



4 Considerações finais

Conclui-se, a partir da análise dos resultados obtidos, que a aplicação da CITT se mostra eficaz na resolução do problema proposto, uma vez que, para o caso simétrico, a formulação apresentada foi validada com os resultados encontrados na literatura especializada. Desta forma, os objetivos foram alcançados satisfatoriamente, onde foi mostrado a influência do índice lei de potência e do número de Biot sobre o desenvolvimento do campo térmico e sobre os números de Nusselt local nas placas superior e inferior. A partir do estudo teórico realizado pode-se otimizar a performance e o dimensionamento de equipamentos térmicos, produzindo soluções com precisão controlada, em curto intervalo de tempo, reduzindo os custos nos recursos empregados nos projetos e aumentando a eficiência dos equipamentos.

## REFERÊNCIAS

- ASSAD, G.E.; LIMA, J.A.; SANTOS, C.A.C.; LIMA, F.A.; VELOSO, D.L.A.; GONÇALVES, P.G., 2018. "Análise da convecção forçada laminar de fluidos não-newtonianos em dutos retangulares". X Congresso Nacional de Engenharia Mecânica- CONEM 2018.
- CHALHUB, D. J. N. M., 2011. "Desenvolvimento de Soluções para Problemas da Advecção-Difusão Combinando Transformação Integral e Métodos Discretos". Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia, UFF. Niterói, Rio de Janeiro.
- COTTA, R.M., 1993. "Integral Transform in Computational Heat and Fluid Flow". CRC Press, Boca Raton.
- COTTA, R.M., 1998. "The Integral Transform Method in Thermal and Fluid". Science and Engineering, Begell House Inc, NY, USA.
- DINIZ, L. S., 2005. "Estudo das Tensões Térmicas no Acoplamento Condução-Radiação em Materiais Semitransparentes"; Tese de doutorado, - CT/IFPB
- JOHNSTON, P. R., 1994. "A solution method for the Graetz problem for non-newtonian fluids with Dirichlet and Neumann boundary conditions", Mathl. Comput. Modelling 19,1-19
- KAKAÇ, S. YENER, Y. W. and Pramuanjaroenkij, A., 2014. "Convective Heat Transfer", CRC Press, 3rd edition, New York
- MIKHAILOV, M. D. and ÖZISIK, M. N., 1984. "Unified Analysis and Solutions of Heat and Mass Diffusion", John Wiley, New York
- MIKHAILOV, M. D. and VULCHANOV, N. L., 1983. "Computational procedure for Sturm-Liouville problems", Journal of computational Physics, v. 5, 323-336
- NORRIS, R. H. and STREID, D. D. , 1940. "Laminar flow heat-transfer coefficient for ducts", Trans. ASME, 62, 525-533.
- SANTOS, C.A.C.; QUARESMA, J.N.N. and LIMA, J. A., 2001. "Convective Heat Transfer in Ducts: the Integral Transform Approach", 348 p., E-Papers, ABCM Mechanical Sciences Series, Rio de Janeiro, Brazil
- SHAH, R.K., 1975. "Thermal entry length solutions for the circular tube and parallel plates", Proc. Natl. Heat Mass Transfer Conf., 3rd, Indian Inst. Technol., Bombay, Vol. I, Pap. No. HMT-11-75
- SHAH, R.K. and LONDON, A.L., 2014. "Laminar Flow Forced Convection in Ducts: A Source Book for Compact Heat Exchanger Analytical Data", vol. 1, Academic Press
- VERONESE, J.P.; SILVA, S.A.; MARTINS, C.R; LUCENA, D.V. and SANTOS, J.C., 2012. "Análise da convecção forçada laminar de um fluido não newtoniano do tipo pseudoplástico via GITT", VII Congresso Norte-Nordeste de Pesquisa e Inovação.