

Solução Analítica Aproximada para Convecção Forçada de Metais Líquidos

Jacques Cesar dos Santos¹
 Laboratório de Energia Solar (LES)
 UFPB, cidade Universitária,
 58059-900
 João Pessoa/PB,083-99983380,
 E-mail:
 jacquescesarsantos@ig.com.br

Samuel Alves da Silva
 Laboratório de Energia Solar (LES)
 UFPB, cidade Universitária,
 58059-900, João Pessoa/PB,
 E-mail: sam_ufpe@yahoo.com.br

Resumo: O presente trabalho apresenta um estudo teórico da convecção forçada interna em um duto circular com condução axial no fluido, realizado através da Técnica da Transformada integral. Uma solução analítica aproximada de baixo custo computacional é obtida. É realizada uma análise gráfica e numérica para o problema.

Palavras Chave: convecção, transformada integral, metais líquidos, computação simbólica

1. Introdução

O aumento do uso de dispositivos de controle em sistemas trocadores de calor tem estimulado o interesse no fenômeno da transferência de calor. A compreensão e correta avaliação da convecção forçada tem recentemente se tornado mais importante segundo Kakaç; Yener (1995, p. 246), em conexão com o controle preciso dos modernos sistemas de transferência de calor.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada, Cotta (1993), é utilizada aqui para estudar o comportamento da entrada térmica no escoamento laminar no interior do duto circular com condução axial no fluido, baixo número de Peclet.

A Técnica da Transformada Integral Generalizada é um método computacional híbrido, analítico-numérico, com controle pré-estabelecido sobre o erro, que apresenta soluções com esforço computacional menor que os métodos numéricos tradicionais.

A idéia básica consiste em transformar um sistema de equações diferenciais parciais em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias, que é truncado e numericamente solucionado através de rotinas computacionais que controlam o erro da solução numérica.

O presente trabalho pode ser inserido no contexto da convecção forçada interna sendo considerado uma extensão dos trabalhos realizados por Bayazitoglu, Özisik (1980) e Cotta (1993, p. 189), na resolução da equação da energia para baixo Peclet.

Nomenclatura

A = matriz de coeficientes
 N = norma
 nt = número de termos no somatório
 Nu = número de Nusselt
 Pe = número de Peclet
 R = coordenada radial adimensional
 Z = coordenada axial adimensional
 U = Perfil de velocidade adimensional

Símbolos gregos

θ = temperatura adimensional
 μ = autovalor
 ψ = autofunção em R

Subscritos

i índice das linhas do sistema (4.a-d)
 j índice das colunas do sistema (4.a-d)
 m relativo a Temperatura média

Sobrescritos

\sim relativo à autofunção normalizada
 $-$ relativo ao potencial transformado
 A relativo a Solução aproximada

2. Formulação do problema

O problema físico consiste na convecção forçada de metais líquidos no interior de dutos circulares, onde

¹ Autor a quem toda correspondência deverá ser endereçada.

o efeito da condução axial é mais relevante. O sistema em estudo é constituído por um duto circular, no interior do qual escoia um metal líquido, com temperaturas prescritas na entrada e na parede do duto, a formulação adimensional do problema é dada segundo Cotta (1993, p. 189) como:

$$U(R) \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial Z} = \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \left(R \frac{\partial \theta}{\partial R} \right) + \frac{1}{P_e^2} \frac{\partial^2 \theta}{\partial Z^2}, \quad 0 < R < 1, \quad Z > 0 \quad (1.a)$$

$$U(R) = 1 - R^2, \quad 0 < R < 1, \quad Z > 0 \quad (1.b)$$

$$\left. \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=0} = 0, \quad Z > 0 \quad (1.c)$$

$$\theta(1, Z) = 0, \quad Z > 0 \quad (1.d)$$

$$\theta(R, 0) = 1, \quad 0 \leq R \leq 1, \quad (1.e)$$

$$\theta(R, \infty) = 0, \quad Z > 0 \quad (1.f)$$

3. Aplicação da transformada integral

A Técnica da Transformada Integral será aplicada ao problema (1.a-f), como segue:

3.1 Problema de autovalor

Será utilizado um problema de Sturm-Liouville que considera o perfil de velocidade para fornecer a base de autofunções.

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dR} \left(R \frac{d\psi_i(R)}{dR} \right) + \mu_i^2 R U(R) \psi_i(R) = 0 \quad (2.a)$$

$$\left. \frac{d\psi_i(R)}{dR} \right|_{R=0} = 0, \quad \psi_i(1) = 0, \quad (2.b-c)$$

Onde a norma e as autofunções normalizadas são respectivamente:

$$N_i = \int_0^1 R U(R) \psi_i(R)^2 dR, \quad (2.d)$$

$$\tilde{\psi}_i(R) = \frac{\psi_i(R)}{N_i}, \quad (2.e)$$

O problema de autovalor (2.a-e) não apresenta solução analítica, assim a própria Técnica da

Transformada Integral foi utilizada para solucioná-lo.

3.2 Par Transformado

$$\theta(R, Z) = \sum_{i=1}^{\infty} \tilde{\psi}_i(R) \bar{\theta}_i(Z), \text{ Inversa,,} \quad (3.a)$$

$$\bar{\theta}_i(Z) = \int_0^1 R U(R) \tilde{\psi}_i(R) \theta(R, Z) dR, \quad \text{Transformada,} \quad (3.b)$$

3.3 Transformação do problema principal

Aplicando no sistema (1.a-f) o operador $\int_0^1 R U(R) \tilde{\psi}_i(R) dR$ e utilizando a propriedade de ortogonalidade das autofunções tem-se:

$$\frac{d\bar{\theta}_i(Z)}{dZ} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i(Z) - \frac{1}{P_e^2} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} \frac{d^2 \bar{\theta}_j(Z)}{dZ^2} = 0, \quad Z > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (4.a)$$

$$A_{ij} = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\psi}_j(R) dR, \quad (4.b)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = \int_0^1 R U(R) \tilde{\psi}_i(R) dR, \quad (4.c)$$

$$\bar{\theta}_i(\infty) = 0, \quad (4.d)$$

Assim o sistema de equações diferenciais parciais foi transformado em um sistema infinito de equações diferenciais ordinárias acopladas, para se obter uma solução analítica explícita o sistema (4.a-d) será aproximado por um sistema desacoplado desprezando-se os termos não-diagonais da matriz A. O que permite uma solução analítica explícita aproximada considerando-se apenas os termos da diagonal principal da matriz A, onde $i = j$. O sistema torna-se:

$$\frac{d\bar{\theta}_i^A(Z)}{dZ} + \mu_i^2 \bar{\theta}_i^A(Z) - \frac{1}{P_e^2} A_{ii} \frac{d^2 \bar{\theta}_i^A(Z)}{dZ^2} = 0, \quad Z > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (5.a)$$

$$A_{ij} = \int_0^1 R \tilde{\psi}_i(R) \tilde{\psi}_j(R) dR, \quad (5.b)$$

$$\bar{\theta}_i(0) = \int_0^1 RU(R)\tilde{\psi}_i(R)dR \quad , \quad (5.c)$$

$$\bar{\theta}_i(\infty) = 0 \quad , \quad (5.d)$$

Onde $\bar{\theta}^A$ representa o potencial transformado aproximado.

3.4 Solução do sistema ordinário

O sistema (5.a-d) tem como solução:

$$\bar{\theta}_i^A(Z) = \bar{\theta}_i(0) \text{Exp} \left(\frac{Pe(Pe - \sqrt{4A_{ii}\mu_i^2 + Pe^2})Z}{2A_{ii}} \right) \quad (6)$$

3.5 Recuperação do potencial original

Substituindo a Equação 6 na Equação 3.a, obtém-se:

$$\theta^A(R, Z) = \sum_{i=1}^{nt} \tilde{\psi}_i(R) \int_0^1 RU(R)\tilde{\psi}_i(R)dR \cdot \text{Exp} \left(\frac{Pe(Pe - \sqrt{4A_{ii}\mu_i^2 + Pe^2})Z}{2A_{ii}} \right) \quad , \quad (7)$$

Quantidades de interesse pratico como a temperatura média e o número de Nusselt local são obtidas segundo Cotta(1993, p. 192) respectivamente por:

$$\theta_m(Z) = 4 \int_0^1 RU(R)\theta(R, Z)dR \quad , \quad (8)$$

$$Nu(Z) = - \frac{2}{\theta_m(Z)} \left. \frac{\partial \theta(R, Z)}{\partial R} \right|_{R=1} \quad , \quad (9)$$

Assim a Equação 7 representa uma solução analítica aproximada para o problema (1.a-f), que permite uma simples implementação computacional, e permite uma análise do problema para diferentes valores dos parâmetros de entrada. Aliada a computação simbólica permite também a análise gráfica e numérica, simplificando o trabalho de interpretação dos resultados.

4. Resultados e discussão

Para validação da presente solução a Tabela 1 apresenta um estudo da convergência e uma

comparação dos valores obtidos aqui com os obtidos por Cotta (1993).

Tabela 1. Análise da convergência da temperatura média ao longo do duto para Peclet 50.

Z / nt	5	10	15	20	Cotta(1993)
0,005	0,8974	0,8964	0,8963	0,8963	0,896
0,025	0,7178	0,7178	0,7178	0,7178	0,718
0,05	0,5800	0,5801	0,5801	0,5801	0,580
0,1	0,3964	0,3964	0,3964	0,3964	0,396
0,25	0,1320	0,1324	0,1324	0,1324	0,132

A Tabela 1 apresenta um estudo do comportamento da convergência da solução, observa-se que para apenas 5 termos no somatório se obtém uma convergência em 2 casas decimais, o que indica que um número pequeno de termos já é suficiente para uma avaliação prática do fenômeno, também pode-se observar que com o incremento do numero de termos se obtém o incremento da convergência, o que é uma característica das soluções obtidas com a técnica da Transformada Integral. Com 15 termos no somatório se obtém a convergência em 4 casas decimais. A superfície de revolução apresentada na Figura 1 representa o campo de velocidade adimensional do fluido escoando no interior do duto, onde a velocidade é função do raio do duto.

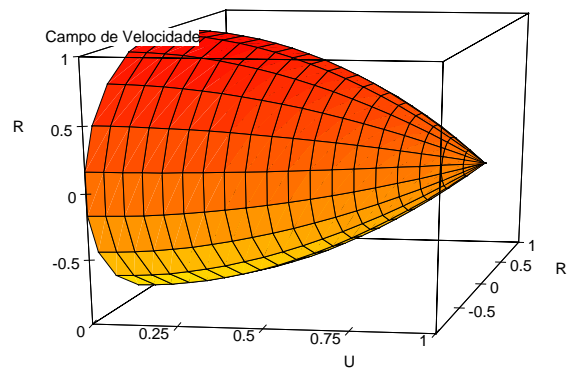


Figura 1. Campo de velocidade do fluido.

A Figura 2 apresenta o campo de temperatura adimensional no interior do duto para Pe=50, observa-se que a variação na direção Z é exponencial em quanto na direção R há uma redução na temperatura mais suave. A análise gráfica permite uma avaliação direta do comportamento da solução, permite que se observe diretamente o comportamento físico do modelo matemático, facilitando o trabalho de interpretação do fenômeno em estudo.

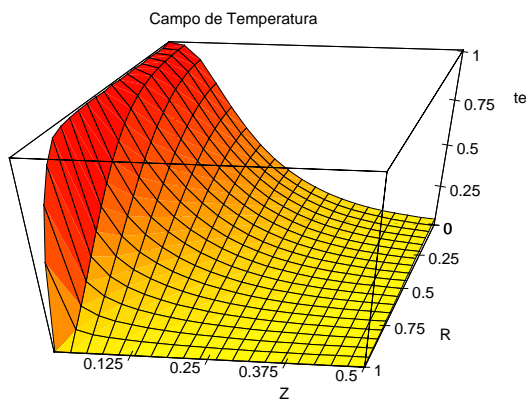


Figura 2. Campo de temperatura para $Pe=50$.

A Figura 3 apresenta uma comparação da temperatura adimensional no centro do canal ao longo de Z com a temperatura adimensional média ao longo do eixo Z para $Pe=50$, pode-se observar que a queda na temperatura ao longo de z é brusca. A curva inferior representa a temperatura média.

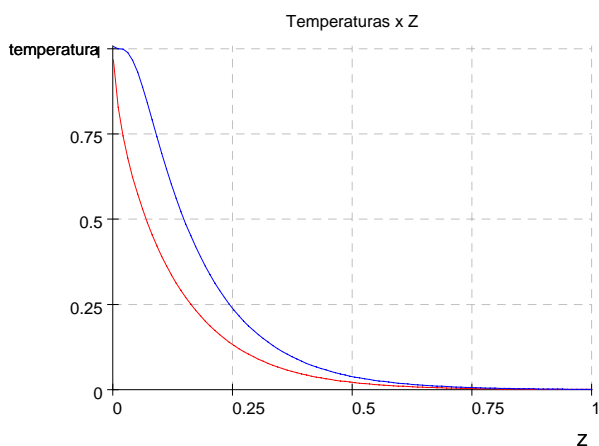


Figura 3. Temperatura ao longo da linha central e a temperatura média para $Pe=50$.

A Figura 4 apresenta uma estimativa do número de Nusselt local ao longo do duto.

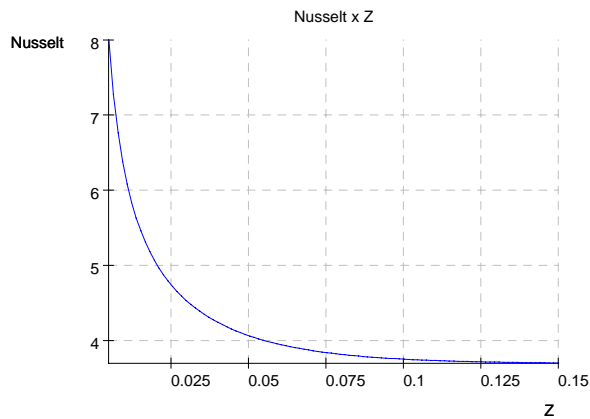


Figura 4. Numero de Nusselt Local para $Pe=50$.

5. Conclusão

Um estudo da convecção no escoamento laminar no interior de um duto circular com temperatura prescrita na parede e o efeito da condução no fluido foi realizado com o auxílio da Técnica da Transformada Integral, apresentando uma solução analítica aproximada para o problema, o que permitiu a obtenção de expressões analíticas para quantidades de interesse pratico. Aliada á computação simbólica permitiu também a análise gráfica e um esforço computacional reduzido.

6. Referências

BAYAZITOGU, Y.; ÖZISIK, M. N. On the Solution of Graetz Type Problems with Axial Conduction. *Int. J. Heat & Mass Transfer*. v.3, p. 1399-1402, 1980.

COTTA, R. M. *Integral Transforms in Computational Heat and Fluid Flow*. CRC Press, Boca Raton, Florida, 1993.

KAKAC, S.; YENER, Y. *Convective Heat Transfer*. 2.ed. CRC Press, Boca Raton, Florida, 2000.

Responsabilidade de autoria

As informações contidas neste artigo são de inteira responsabilidade dos seus autores. As opiniões nele emitidas não representam, necessariamente, pontos de vista da Instituição e/ou do Conselho Editorial.