

# Decaimento alpha: uma abordagem por tunelamento quântico

Daniel Borges Silva <sup>[1]</sup>, Francisco Florêncio Batista Júnior <sup>[2]</sup>

[1] [daniel.silva@ifce.edu.br](mailto:daniel.silva@ifce.edu.br) / IFCE - Campus Cedro. [2] [florencio.batista@ifce.edu.br](mailto:florencio.batista@ifce.edu.br) / IFCE - Campus Tianguá.

## RESUMO

O presente trabalho buscou deduzir a teoria do decaimento alpha, tomando como base o tunelamento quântico e usando aproximações na resolução da equação de Schrödinger para o potencial coulombiano, em que foi possível encontrar de forma analítica a constante de decaimento alpha. Uma das aproximações usadas foi o método de resolução de equações diferenciais WKB, pelo qual pudemos encontrar o fator de Gamow. A partir daí, foi possível identificar a dependência da taxa de decaimento com a energia da radiação, bem como o número atômico. Além disso, entendemos o comportamento da probabilidade de tunelamento com respeito a algumas variáveis como energia da partícula emitida e número atômico do núcleo que decai. Com isso, podemos ajudar pesquisadores em geral no estudo da radiação alpha.

**Palavras-chave:** Radiação. Decaimento alpha. Tunelamento quântico. WKB.

## ABSTRACT

*The present work sought to deduce the alpha decay theory based on quantum tunneling and using approximations in the resolution of the Schrödinger equation for Coulomb potential. It was possible to find the alpha decay constant analytically. One of the approaches used was the WKB method for solving differential equations, by which the Gamow factor was reached. From this point on, it was possible to identify the dependence of the decay rate with the energy of the radiation, as well as the atomic number. Besides that, we could understand the behavior of the tunneling probability with respect to some variables such as emitted particle energy and atomic number of the nucleus that decays. With this research we can help researchers in general in the study of alpha radiation.*

**Keywords:** Radiation. Alpha decay. Quantum tunneling. WKB.

## 1 Introdução

Decaimento nuclear é o processo pelo qual o núcleo, com um certo número de núcleons, se desintegra em outro núcleo menor e em partículas residuais. Os tipos de decaimentos são classificados com respeito ao tipo de partícula liberada. Podemos citar como exemplo o decaimento alpha, beta ou gama. Entre os três tipos, a radiação alpha é a mais comum, massiva e fraca das radiações corpusculares encontradas na natureza.

Neste trabalho iremos estudar o decaimento alpha usando como ferramenta o tunelamento quântico. O estudo se concentrou na dedução da teoria probabilística para a desintegração alpha e na análise de alguns elementos específicos, tais como a probabilidade de tunelamento, constante de decaimento e energia da radiação.

O estudo do decaimento alpha por tunelamento quântico já foi feito pelo físico russo George Gamow em 1928 (ANGELO, 2016), de modo que pretendemos aqui fazer uma síntese detalhada da teoria. O tunelamento quântico decorre da solução da equação de Schrödinger para determinados sistemas confinados, uma vez que a probabilidade do sistema a ser encontrado em uma região classicamente proibida é não nula. Assim, para resolver a equação de Schrödinger no potencial de Coulomb foi usado o método de aproximação de WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin), conforme o procedimento de Agrelo (1992).

Esse ensaio busca deduzir a teoria do decaimento alpha de núcleos pesados usando como ferramenta o efeito túnel quântico. Procuramos, também, analisar como algumas variáveis dessa teoria se comportam em diferentes configurações de energia, velocidade da partícula radioativa e número atômico do núcleo original. Com isso, podemos auxiliar professores e pesquisadores de Física no estudo da radiação alpha.

Observou-se que a taxa de decaimento tem um valor máximo com respeito ao número atômico e que existe um número atômico mínimo para a ocorrência do decaimento alpha. Verificou-se também que a probabilidade de tunelamento depende da energia da partícula  $\alpha$  emitida, de modo que, para um dado núcleo pai com um específico número atômico e de massa, existe uma energia mais provável para a radiação observada.

O trabalho está organizado da seguinte maneira: Na seção 2, fazemos uma explanação conceitual do fenômeno de decaimento alpha; na seção 3,

introduzimos o método WKB; na seção 4, deduzimos a teoria probabilística do decaimento radioativo; na seção 5, encontramos a constante de decaimento; na seção 6, resolvemos a equação de Schrödinger usando a aproximação WKB para chegar na probabilidade de tunelamento; na seção 7, fazemos algumas considerações acerca da energia cinética da radiação; na seção 8, analisamos o comportamento de variáveis da teoria e, nas conclusões, fazemos algumas considerações finais sobre o trabalho e os resultados aqui apresentados.

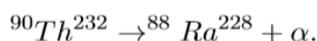
## 2 Decaimento alpha

O fenômeno de decaimento nuclear ocorre quando um núcleo pesado se encontra em um estado cuja energia não é a mais baixa para o sistema (EISBERG; RESNICK, 1979). Assim, essa energia extra favorece a desintegração desse núcleo em outro menor e em partículas residuais energéticas, de modo que a emissão de partículas radioativas é uma tentativa natural do núcleo de se tornar estável.

As observações experimentais são feitas sempre com um número muito grande de átomos, pois não é possível prever leis determinísticas de desintegração para átomos individuais, mas obtemos resultados satisfatórios para uma amostra grande de núcleos. Assim, o fenômeno de desintegração radioativa é de natureza estatística: cada núcleo numa amostra possui certa probabilidade de desintegração, mas não podemos saber qual deles irá desintegrar-se realmente (SAMANA, 2012).

O processo de radiação alpha é o decaimento mais comum na natureza e ocorre em núcleos cujo número atômico é maior que 82 (PARKHOMENKO; SOBICZEWSKI, 2005). Nesse processo, o núcleo original (pai) instável decai espontaneamente em um núcleo mais leve (filho) e em uma partícula  $\alpha$  ( ${}^2\text{He}^4$ ). Esse processo é comum por ser favorável energeticamente, uma vez que a massa do núcleo pai é maior que a soma da massa do núcleo filho e da partícula  $\alpha$ . Tal redução de massa nuclear é basicamente devido à diminuição da energia coulombiana pela perda da carga  $2e$  (EISBERG; RESNICK, 1979). A diferença de massa nuclear é convertida, basicamente, em energia cinética da partícula, com exceção de uma pequena parcela que o núcleo residual usa como trabalho para recuar durante o processo de desintegração.

Um exemplo de decaimento alpha é a desintegração do Tório:



Para esse processo, as massas envolvidas são:

$$m_{Th} = 232,038124u,$$

$$m_{Ra} = 228,031139u,$$

$$m_{\alpha} = 4,002603u,$$

com a unidade de massa atômica dada por  $u = 1,660538921(73) \times 10^{-27} \text{ kg}$ . Daí vemos que:

$$m_{Th} - (m_{Ra} + m_{\alpha}) = 0,004382u.$$

Durante o processo, observamos que a soma da massa da partícula  $\alpha$  e do Rádío é menor que a massa do Tório. Usando um fator de conversão obtido a partir do conceito de energia de repouso ( $E = mc^2$ ):

$$(1u)c^2 = 931,5 \text{ MeV},$$

vemos que essa diferença equivale a  $4,08 \text{ MeV}/c^2$  (TIPLER; MOSCA, 2009). Assim, a energia cinética da partícula emitida pelo  ${}^{90}\text{Th}^{232}$  é aproximadamente  $4,08 \text{ MeV}$ , o que está de acordo com o princípio de conservação da energia.

Quando o núcleo pai tem número de massa  $A$  múltiplo de 4, o núcleo filho e todos aqueles que serão produzidos durante a série de decaimentos também terão número de massa múltiplo de 4 ( $4n$ ). Por outro lado, se  $A$  for  $4n + 1$ , para  $n$  inteiro, o número de massa dos núcleos filhos será dado por  $4n + 1$ , em que  $n$  diminui uma unidade em cada decaimento. Assim, as séries de decaimento radioativo mais comuns são:  $4n$ ,  $4n + 1$ ,  $4n + 2$  ou  $4n + 3$ , dependendo do valor de  $A$  (MANG, 1964). Cada uma dessas séries é uma sucessão dos produtos derivados que procedem de um único núcleo original, chamado de núcleo pai (SAMANA, 2012).

Samana (2012) discorre sobre a importância do decaimento alpha para o estudo do átomo e das interações nucleares: o decaimento alfa é importante para a determinação das massas nucleares e raio médio de núcleos. Também podemos usar o decaimento alfa para estudar a fissão nuclear em reatores e a formação de núcleos super pesados (núcleos com número de massa com  $A \approx 300$ ).

### 3 Método WKB

O método de aproximação WKB, ou aproximação WKB, é um método semiclássico de solução aproximada da equação de Schrödinger independente do tempo quando o comprimento de onda do sistema é muito menor que as distâncias típicas onde a energia varia (SAKURAI; NAPOLITANO, 2014). WKB é a sigla de Wentzel-Kramers-Brillouin, uma referência aos físicos Gregor Wentzel, Hendrik Kramers e Léon Brillouin, que desenvolveram o método em 1926. Antes desses físicos, em 1923, Harold Jeffreys já havia desenvolvido um método geral de aproximação para equações diferenciais de segunda ordem e lineares, mas WKB foi deduzido de forma independente e conseguiu incluir os pontos de retorno, ou seja, pontos que conectavam soluções evanescentes e oscilatórias.

O método WKB generalizado é usado para aproximar a solução de uma equação diferencial em que a derivada de mais alta ordem é multiplicada por um fator  $\epsilon$  muito pequeno, ou seja, uma equação do tipo:

$$\epsilon \frac{d^n y}{dx^n} + a(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + k(x) \frac{dy}{dx} + z(x)y = 0. \quad (1)$$

A equação diferencial deve admitir uma solução caracterizada por uma série assintótica:

$$y(x) = y_0 \exp \left[ \frac{1}{\epsilon} \sum_{n=0}^{\infty} L_n(x) \right]. \quad (2)$$

Em geral, a série é divergente, mas para o caso  $a(x) = k(x) = 0$ ,  $n = 2$  e no limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , a solução aproximada é (PEDRON; MENDES, 2008):

$$y(x) \approx y_0 \exp \left[ \pm \frac{1}{\epsilon} \int z(x)^{1/2} dx \right]. \quad (3)$$

Olhando mais especificamente para a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$\frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [E - V(x)] \psi(x) = 0, \quad (4)$$

e definindo o fator

$$k^2(x) = 2m[E - V(x)] \quad (5)$$

temos:

$$\hbar^2 \frac{d^2 \psi(x)}{dx^2} + k^2(x) \psi(x) = 0. \quad (6)$$

Observe que no caso ligado, ou seja,  $E < V(x)$ , a equação se transforma tomando  $k(x) \rightarrow i|k(x)|$ .

Supondo que o potencial é uma função bem comportada e que varia lentamente no intervalo estudado, usamos o ansatz (SAKURAI; NAPOLITANO, 2014):

$$\psi(x) = \psi_0 \exp [iW(x)/\hbar]. \quad (7)$$

Em que  $W(x)$  pode ser uma função complexa. Assim, pela Equação 6, temos:

$$i\hbar \left( \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right) - \left( \frac{dW(x)}{dx} \right)^2 + k^2(x) = 0. \quad (8)$$

Como  $V(x)$  não varia abruptamente no intervalo, temos que

$$\hbar \left| \frac{d^2 W(x)}{dx^2} \right| \ll \left| \frac{dW(x)}{dx} \right|^2. \quad (9)$$

Escrevendo  $W(x)$  como uma expansão na constante de Planck, podemos fazer uma aproximação de ordem zero na Equação 8:

$$\frac{dW_0(x)}{dx} = \pm i\hbar |k(x)|. \quad (10)$$

Usamos uma aproximação de primeira ordem que, pela Equação 8, fica

$$\begin{aligned} \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 &= i\hbar \left( \frac{d^2 W_0(x)}{dx^2} \right) + \hbar^2 k^2(x), \\ \left( \frac{dW_1(x)}{dx} \right)^2 &= \pm i\hbar^2 \frac{dk(x)}{dx} + \hbar^2 k^2(x). \end{aligned} \quad (11)$$

Tomando  $W(x) \approx W_1(x)$ :

$$W(x) \approx \pm \hbar \int_0^x dx' k(x') \left[ 1 \pm i \frac{dk(x')}{k^2(x')} \right]^{1/2}, \quad (12)$$

em que o último termo é muito pequeno. Expandindo em séries de Taylor, encontramos o fator de fase:

$$W(x) \approx \pm \hbar \int_0^x dx' k(x') + \frac{i\hbar}{2} \ln [k(x)]. \quad (13)$$

Pela Equação 7, a função de onda aproximada é:

$$\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{k(x)}} \exp \left[ \pm i \int_0^x dx' k(x') \right] \quad (14)$$

e as energias permitidas ao sistema são definidas pela aplicação das condições de contorno nos pontos clássicos de retorno. Considerando dois pontos de retorno sucessivos  $x_1$  e  $x_2$ , a condição de quantização para o sistema confinado é semelhante à condição de Sommerfeld (SAKURAI; NAPOLITANO, 2014):

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{2m[E_n - V(x)]} = \left( n + \frac{1}{2} \right) \pi \hbar, \quad (15)$$

com  $n$  inteiro positivo.

## 4 Teoria probabilística de decaimento

O processo de desintegração radioativa acontece na natureza em um grande conjunto de núcleos radioativos e não em núcleos isolados, de modo que o sistema tem caráter aleatório e pode ser descrito por leis probabilísticas. Nessa seção, buscamos revisar a teoria probabilística de decaimento radioativo, que é válida para todos os tipos de decaimentos encontrados na natureza: Alpha, Beta e Gamma.

Para quantificar o decaimento de um número muito grande de núcleos, vamos definir a atividade  $S$ . A atividade de uma amostra é a variação temporal do número de átomos que decaem em outros mais leves. Logo, dado o número de núcleos  $dN$  que sofrem desintegração no tempo  $dt$ , a atividade do sistema será descrita como:

$$S = - \frac{dN}{dt}. \quad (16)$$

O sinal negativo indica que o número de núcleos remanescentes na amostra  $N$  diminui com o tempo. A unidade de atividade é o becquerel ( $Bq$ ) ou o curie ( $Ci$ ), com  $1Bq = 1$ decaimento/s e  $1Ci = 3,7 \times 10^{10}Bq$ . Verifica-se, experimentalmente, que a atividade  $S$  decai exponencialmente com o tempo; assim, o seu comportamento pode ser escrito como:

$$S(t) = S_0 e^{-\lambda t}. \quad (17)$$

A constante  $\lambda$  é chamada de constante de desintegração (ou taxa de decaimento) e tem dimensão de probabilidade por unidade de tempo (TIPLER; LLEWELLYN, 2013);  $S_0$  é a atividade inicial da amostra.

Por outro lado, se  $N(t)$  é o número de núcleos radioativos não desintegrados no instante  $t$ , podemos definir a quantidade de núcleos  $-dN$  que decaem no tempo  $dt$  como o produto de  $N$  pela probabilidade de decaimento. Essa probabilidade, por sua vez, é o produto de  $\lambda$  pelo tempo  $dt$ . Nesse tempo, os núcleos que decaem são:

$$-dN = \lambda N dt. \quad (18)$$

Integrando a relação acima, obtemos a lei de decaimento radioativo:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}, \quad (19)$$

em que  $N_0$  é a quantidade inicial de núcleos da amostra e  $\lambda$  constante no tempo. Apesar da constante de decaimento não depender do tempo, deve depender do tipo de decaimento e das características do núcleo pai, uma vez que, por exemplo, um núcleo de Tório decai de forma diferente de um núcleo de Urânio e que a emissão de uma partícula alpha é um processo físico diferente da emissão de uma partícula beta, ou raios gamma. A lei de decaimento fornece a quantidade de núcleos na amostra que sobrevivem sem decair no tempo  $t$ ; pelas Equações. 16 e 19, podemos obter a atividade em função de  $N$ :

$$S(t) = \lambda N(t). \quad (20)$$

Medições experimentais indicam que a atividade radioativa cai pela metade depois de um dado tempo  $T_{1/2}$  chamado de tempo de meia vida do material, logo:

$$S(T_{1/2}) = \frac{S_0}{2}. \quad (21)$$

Portanto, aplicando essa condição na Equação 17, encontramos:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}. \quad (22)$$

Não obstante, podemos definir ainda a vida média  $T$  da amostra, que é entendida como o tempo médio em que o núcleo sobrevive antes de decair, e é definida como sendo o inverso da taxa de decaimento (TIPLER; LLEWELLYN, 2013):

$$T = \frac{1}{\lambda}. \quad (23)$$

Olhando, ainda, para as Equações 22 e 23, mostramos que o tempo médio de vida é proporcional ao tempo de meia vida:

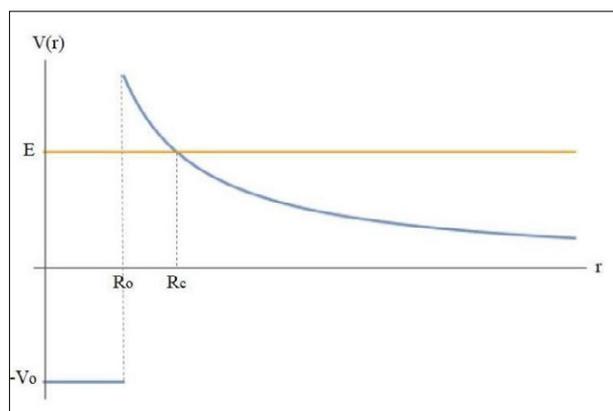
$$T = \frac{T_{1/2}}{\ln(2)}. \quad (24)$$

Dessa forma, as leis do decaimento radioativo estão bem definidas: é possível prever a fração da amostra que sobrevive em um certo tempo, assim como sua vida média ou meia vida, se soubermos a constante de decaimento. Nas próximas seções, iremos concentrar os esforços em deduzir  $\lambda$  para o decaimento alpha usando a aproximação WKB na equação de Schrödinger.

## 5 Constante de decaimento alpha

Observa-se que toda a teoria desenvolvida na seção anterior está baseada na taxa de decaimento  $\lambda$ , uma constante que precisamos encontrar. Para isso, iremos lançar mão de uma abordagem semiclassical, de modo a simplificar o problema. Para tratar o problema, vamos considerar apenas a coordenada radial do sistema núcleo atômico e a partícula  $\alpha$  e desconsiderar a interação dessa partícula com os elétrons que circundam o núcleo. Vamos considerar que a partícula alpha esteja sujeita a um poço de potencial  $-V_0$  dentro do núcleo e uma barreira coulombiana na região de tunelamento, conforme a Figura 1. Tal aproximação é válida, pois, dentro do núcleo, a partícula está ligada, de modo que, para energias negativas, a probabilidade de tunelamento é nula, enquanto que, na região de tunelamento, a interação é basicamente devido à atração eletrostática entre a carga  $2e$  e  $(Z - 2)e$ .

**Figura 1** – Potencial do núcleo pai, no qual a partícula alpha está submetida



Fonte: Autores

Imaginemos que a partícula  $\alpha$  já exista dentro do núcleo pai e esteja presa no poço de potencial representado na Figura 1, em que:  $R_0$  é o ponto onde a partícula se desprende do núcleo e  $R_C$  é o raio crítico, ou seja, o ponto em que a energia potencial se iguala à energia  $E$ . Nesse ponto, a partícula sai do potencial coulombiano e fica praticamente livre. Para  $r > R_C$ , o  $\lim[V(r)]$  para  $r \rightarrow \infty$  é 0, de modo que o potencial é insignificante e podemos despreza-lo, considerando, assim, a partícula alpha fora do núcleo como uma partícula livre:

$$V(r) = \begin{cases} -V_0 & \text{se } 0 < r < R_0 \\ \frac{2k(Z-2)e^2}{r} & \text{se } R_0 < r < R_C \\ 0 & \text{se } r > R_C \end{cases}, \quad (25)$$

em que  $k$  é a constante eletrostática do meio,  $2e$  é a carga da partícula  $\alpha$  e  $(Z-2)e$  é a carga do núcleo filho. Ainda:

$$R_0 = R_r + R_\alpha, \quad (26)$$

com  $R_r$  o raio do núcleo filho ou núcleo residual e  $R_\alpha$  o raio da partícula  $\alpha$ . Essa afirmação é possível, pois admitimos que a partícula  $\alpha$  exista dentro do núcleo junto à superfície nuclear. Para encontrar os valores de  $R_r$  e  $R_\alpha$ , podemos considerar o modelo da gota líquida, no qual o raio nuclear é proporcional a  $A^{1/3}$  (TIPLER; LLEWELLYN, 2013):

$$R = R_\rho A^{1/3}, \quad (27)$$

com  $R_\rho = (1,2 \pm 0,2)fm$  e  $A$  o número de massa do núcleo. Para encontrar  $R_C$ , fazemos  $V(R_C) = E$  na Equação 25, logo:

$$R_C = \frac{2k(Z-2)e^2}{E}. \quad (28)$$

Se  $E > V(R_0)$ , a partícula atravessa a barreira de forma clássica. Porém, mesmo para  $E < V(R_0)$ , a partícula pode atravessar o potencial pelo fenômeno de tunelamento quântico. Esse fenômeno é observado em sistemas quânticos confinados por uma barreira de potencial em que a energia da partícula confinada é menor que o potencial. Observa-se que a partícula, nesse sistema, tem probabilidade não nula de atravessar a barreira de potencial com  $E < V(R_0)$ . Assim, vamos tratar o decaimento alpha pelo efeito túnel quântico.

De início, a taxa de decaimento  $\lambda$  pode ser entendida como o produto do número de tentativas  $f$  que a partícula  $\alpha$  faz por unidade de tempo para atravessar a barreira e a probabilidade de tunelamento  $P$ :

$$\lambda = fP. \quad (29)$$

Como a partícula  $\alpha$  está inicialmente confinada no núcleo e pode se movimentar nesse espaço, dizemos que ela realiza um movimento periódico, pois ela está constantemente ricocheteando com a barreira de potencial nuclear, de modo que incide e reflete nesta muitas vezes. Dessa forma, a amplitude do movimento é aproximadamente  $R_0$  e podemos relacionar essa amplitude com a velocidade linear da partícula  $v_l$ :

$$v_l \sim fR_0. \quad (30)$$

Dentro do núcleo  $V(r) = -V_0$ , de forma que a energia cinética pode ser escrita como  $K = E + V_0$ , em que

$$K = \frac{\mu v_l^2}{2}, \quad (31)$$

com  $\mu$  sendo a massa reduzida do sistema formado pela partícula  $\alpha$  e núcleo filho. Logo, encontramos:

$$v_l = \sqrt{\frac{2(E + V_0)}{\mu}}. \quad (32)$$

Combinando as Equações 30 e 32, temos:

$$f = \sqrt{\frac{2(E + V_0)}{\mu}} \frac{1}{R_0}, \quad (33)$$

e a massa reduzida é dada por:

$$\mu = \frac{m_N m_\alpha}{m_N + m_\alpha},$$

em que  $m_N$  é a massa do núcleo residual e  $m_\alpha$  a massa da partícula  $\alpha$ . Como  $m_\alpha = 4u$  e  $m_N = (A - 4)u$ , temos:

$$\mu = \frac{4(A - 4)u}{A}, \quad (34)$$

em que  $u$  é a unidade de massa atômica e  $A$  é o número de massa do núcleo pai.

## 5.1 Probabilidade de tunelamento

Para encontrar a probabilidade de tunelamento da partícula  $\alpha$ , devemos encontrar a função de onda que a representa em cada região onde o potencial muda.

Com isso, devemos resolver a equação de Schrödinger para cada região da Figura 1:

- Região I:  $0 < r < R_o$ ;
- Região II:  $R_o < r < R_c$ ;
- Região III:  $r > R_c$ .

Como o potencial é coulombiano e não depende do tempo, dizemos que a partícula  $\alpha$  está no estado estacionário e, portanto, a função de onda  $\Psi$  pode ser escrita como um produto de  $\psi$  que depende apenas das coordenadas espaciais por uma exponencial que depende do tempo (GRIFFITHS, 2011):

$$\Psi = \psi e^{-\frac{iEt}{\hbar}}. \quad (35)$$

A função  $\psi$  satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \nabla^2 \psi + (V(r) - E)\psi = 0. \quad (36)$$

Sendo o potencial radial, vamos usar a equação de Schrödinger em coordenadas esféricas a fim de aproveitar a simetria do problema:

$$-\frac{\hbar^2}{2\mu} \left[ \left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right] + (V(r) - E)\psi = 0. \quad (37)$$

Usando ainda o método de separação de variáveis, fazemos  $\psi(r, \theta, \phi) = R(r)Y(\theta, \phi)$ . Logo, substituindo  $\psi(r, \theta, \phi)$  na Equação 37, temos:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{dR(r)}{dr} \right) - \frac{2\mu}{\hbar^2} (V(r) - E)r^2 = l(l+1) \quad (38)$$

e

$$\frac{1}{Y(\theta, \phi) \text{sen}(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \text{sen}(\theta) \frac{\partial Y(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{Y(\theta, \phi) \text{sen}^2(\theta)} \frac{\partial^2 Y(\theta, \phi)}{\partial \phi^2} = -l(l+1), \quad (39)$$

com  $l$  constante. A solução da equação angular é dada pelos harmônicos esféricos  $Y_l^m(\theta, \phi)$  (SAKURAI; NAPOLITANO, 2014), com  $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$  e  $m = -l, -l+1, \dots, 0, 1, 2, \dots, l-1, l$  os números quânticos de momento angular e azimutal, respectivamente. Por simplicidade, e sem perda de generalidade, vamos supor que o momento angular da partícula  $\alpha$  é nulo

e, portanto,  $l = 0$ . Nesse caso, a parte radial é uma constante (ABRAMOWITZ; STEGUN, 1965):

$$Y_0^0(\theta, \phi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\pi}}. \quad (40)$$

Portanto, resta analisar a Equação 38 e, para isso, introduzimos a função auxiliar  $\delta(r) = rR(r)$ , de modo que:

$$\frac{d^2 \delta(r)}{dr^2} - \frac{2\mu}{\hbar^2} (V(r) - E)\delta(r) = 0. \quad (41)$$

Devemos, agora, resolver a Equação 41 para as 3 regiões em que o potencial difere e, então, impor as condições de contorno nos pontos  $R_o$  e  $R_c$ .

Assim, para a região I, temos  $V(r) = -V_o$  e a Equação 41 se resume a:

$$\frac{d^2 \delta_I(r)}{dr^2} + \frac{2\mu(V_o + E)}{\hbar^2} \delta_I(r) = 0.$$

Temos, como solução para essa região,

$$\delta_I(r) = Ae^{i\rho r} + Be^{-i\rho r}, \quad (42)$$

com

$$\rho = \frac{\sqrt{2\mu(V_o + E)}}{\hbar}. \quad (43)$$

Como a partícula se movimenta de  $\theta \rightarrow r$ , a Equação 42 pode ser entendida como uma combinação de onda incidente e refletida sobre a barreira de potencial em  $r = R_o$ . Logo,  $Ae^{i\rho r}$  é a onda incidente e  $Be^{-i\rho r}$  a onda refletida.

Para a região II, temos  $V(r)$  coulombiano e  $E < V(r)$ . Assim, a Equação 41 pode ser resolvida pelo método WKB (Wentzel-Kramers-Brillouin), conforme usado em Agrelo (1992), uma vez que o comprimento de onda da partícula  $\alpha$  é muito menor do que a distância percorrida por ela. Podemos reescrever a Equação 41 para a região II:

$$\frac{d^2 \delta_{II}(r)}{dr^2} - K^2(r)\delta_{II}(r) = 0, \quad (44)$$

em que a solução WKB é dada pela Equação 14:

$$\delta_{II}(r) = \frac{C\hbar}{\sqrt{2\mu(V(r) - E)}} \exp \left[ \pm \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_0^r dr' \sqrt{V(r') - E} \right] \quad (45)$$

A função de onda deve tender a zero para  $r \rightarrow \infty$ , pois, para  $R_c - R_o$  suficientemente grande, a probabilidade de tunelamento deve se anular. Logo, a solução com a exponencial positiva não tem sentido

físico, uma vez que, na região II, a função deve ser evanescente. Portanto,

$$\delta_{II} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \sqrt{\frac{r}{2k(Z-2)e^2 - Er}} C e^{Q(r)} \quad (46)$$

com

$$Q(r) = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_0^r dr' \sqrt{\frac{2k(Z-2)e^2}{r'} - E}. \quad (47)$$

Na região III, o potencial continua o mesmo, porém  $E > V(r)$ . Logo, fazemos  $(V(r) - E)^{1/2} \rightarrow i(E - V(r))^{1/2}$ , de modo que a solução é:

$$\delta_{III}(r) = \frac{D\hbar}{\sqrt{2\mu(E - V(r))}} \exp \left[ \pm i \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_0^r dr' \sqrt{E - V(r')} \right] \quad (48)$$

A solução com a exponencial negativa pode ser entendida como uma frente de onda indo na direção do núcleo. Como sabemos que a partícula sai do núcleo, a solução de exponencial negativa não é aceitável para esse sistema. Logo:

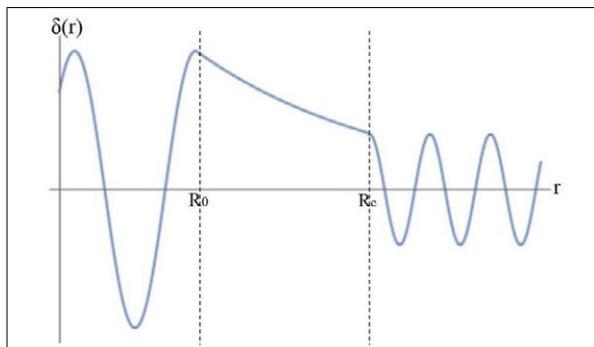
$$\delta_{III} = \frac{\hbar}{\sqrt{2\mu}} \sqrt{\frac{r}{Er - 2k(Z-2)e^2}} D e^{iH(r)} \quad (49)$$

com

$$H(r) = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_0^r dr' \sqrt{E - \frac{2k(Z-2)e^2}{r'}}. \quad (50)$$

Desse modo,  $A$  é a amplitude de onda incidente em  $R_\rho$ ,  $B$  a amplitude de onda refletida em  $R_0$  e  $D$  a amplitude de onda transmitida para fora do núcleo. O comportamento qualitativo da função  $\delta(r)$  está representado na Figura 2:

**Figura 2** – Comportamento da função  $\delta(r)$ . Na região I ( $0 < r < R_0$ ), o comportamento é oscilatório, ou seja, a partícula se movimenta no núcleo; na região II ( $R_0 < r < R_c$ ), é uma função evanescente; na região III ( $r > R_c$ ), continua oscilatória, mas com amplitude menor



Fonte: Autores

Usando as condições de contorno em  $r = R_0$ :

$$\delta_I(R_0) = \delta_{II}(R_0) \quad (51)$$

e

$$\left. \frac{d\delta_I(r)}{dr} \right|_{R_0} = \left. \frac{d\delta_{II}(r)}{dr} \right|_{R_0}; \quad (52)$$

e no ponto  $r = R_c$ :

$$\delta_{II}(R_c) = \delta_{III}(R_c) \quad (53)$$

e

$$\left. \frac{d\delta_{II}(r)}{dr} \right|_{R_c} = \left. \frac{d\delta_{III}(r)}{dr} \right|_{R_c} \quad (54)$$

podemos mostrar que a amplitude de onda transmitida na barreira  $r = R_c$  é

$$D = \frac{2\rho Q'(R_0) \exp[i(\rho R_0 - H(R_c))] \exp[-(Q(R_c) - Q(R_0))] A}{i\rho - Q'(R_0) + \frac{1}{2R_0} \left[ 1 + \left( \frac{\rho_0}{Q'(R_0)} \right)^2 \right]} \quad (55)$$

com

$$\rho_0 = \frac{\sqrt{2\mu E}}{\hbar} \quad (56)$$

e

$$Q'(R_0) = \left. \frac{dQ(r)}{dr} \right|_{R_0} = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \sqrt{\frac{2k(Z-2)e^2 - ER_0}{R_0}}. \quad (57)$$

Por outro lado, a probabilidade de transmissão, ou tunelamento, é dada pela razão entre a corrente de probabilidade da onda transmitida e a corrente de probabilidade de onda incidente (NUSSENZVEIG, 1998):

$$P = \frac{j_{trans}}{j_{inc}} \approx \frac{|D|^2}{|A|^2}. \quad (58)$$

Devido à Equação 55, temos:

$$P = \frac{16\rho^2 R_0^2 [Q'(R_0)]^2 \exp[-2\gamma]}{4(R_0\rho)^2 + \left[ 1 - 2R_0Q'(R_0) + \left( \frac{\rho_0}{Q'(R_0)} \right)^2 \right]^2}. \quad (59)$$

O fator de Gamow (AGRELLO, 1992) é definido por  $\gamma = Q(R_c) - Q(R_0)$ :

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \int_{R_0}^{R_c} dr \sqrt{\frac{2k(Z-2)e^2}{r} - E}. \quad (60)$$

Resolvendo a integral e considerando a definição do raio crítico dado pela Equação 28, encontramos o fator de Gamow a menos de um fator de fase:

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\mu}}{\hbar} \left[ \frac{2k(Z-2)e^2}{\sqrt{E}} \arctan \left( \sqrt{\frac{2k(Z-2)e^2}{ER_0} - 1} \right) - R_0 \sqrt{\frac{2k(Z-2)e^2}{R_0} - E} \right]. \quad (61)$$

Com isso, especificamos a taxa de decaimento (Equação 29) entre termos do número atômico e do número de massa do núcleo pai, e da energia da partícula  $\alpha$  emitida. Nas próximas seções iremos estudar o comportamento da Equação 29 com relação a esses parâmetros.

## 6 Energia cinética

Durante o processo de decaimento alpha existe uma perda de massa, ou seja, a soma da massa do núcleo filho com a massa da partícula  $\alpha$  é menor que a massa do núcleo pai. Essa massa perdida é compensada, basicamente, pela energia cinética da partícula (PARKHOMENKO; SOBICZEWSKI, 2005). Na realidade, a diferença de massa é apenas aproximadamente equivalente à energia cinética da partícula, pois uma pequena parcela da energia é consumida devido ao recuo do núcleo filho. Para deduzir a energia da partícula, vamos definir o equivalente energético da massa perdida durante o decaimento  $q$ :

$$q = [m_{Z,A} - (m_{Z-2,A-4} + m_{2,4})]c^2, \quad (62)$$

em que  $m_{Z,A}$  é a massa atômica do núcleo pai,  $m_{Z-2,A-4}$  é a massa do núcleo filho e  $m_{2,4}$  é a massa da partícula  $\alpha$ . Supondo que o núcleo pai estava inicialmente em repouso e que a velocidade da partícula alpha é muito menor que a da luz durante o decaimento, a partícula é emitida com momento linear de módulo  $p$  e, como consequência, o núcleo filho recua com momento linear de módulo  $p$  no sentido oposto. Pelo princípio de conservação da energia, a energia convertida em energia cinética depois do decaimento deve ser oriunda da variação da massa do sistema, logo:

$$q = \frac{p^2}{2m_{Z-2,A-4}} + \frac{p^2}{2m_{2,4}}, \quad (63)$$

com  $p^2/(2m_{Z-2,A-4})$  a energia cinética do núcleo filho e  $p^2/(2m_{2,4})$  a energia cinética da partícula  $\alpha$ . Dado  $m_{Z-2,A-4} = (A-4)u$  e  $m_{2,4} = 4u$ , substituímos na Equação 63 e usamos o fato de que depois de deixar

o núcleo a partícula tem basicamente energia cinética. Assim, obtemos:

$$\frac{p^2}{2m_{2,4}} = E = \left( \frac{A-4}{A} \right) q, \quad (64)$$

em que  $A$  é o número de massa do núcleo pai e  $q$  é dado pela Equação 62.

Assim, usando uma análise semiclassical, a energia da partícula Alpha depende do parâmetro  $q$ , que é a diferença de massa no decaimento. É importante frisar que esse estudo não levou em conta a eventual perda de energia eletromagnética, ou a energia de excitação dos elétrons do átomo pai ou filho, pois os consideramos no estado fundamental. O spin eletrônico também não foi levado em conta e, futuramente, é possível considerar esses graus de liberdade para então obter uma descrição energética mais completa.

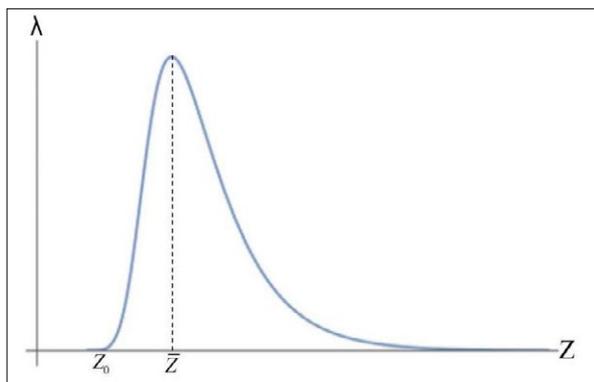
## 7 Estudo de variáveis da teoria

Vamos estudar aqui o comportamento de algumas variáveis da teoria deduzida nos tópicos anteriores. Observa-se que a taxa de decaimento ou a probabilidade dependem de duas ou mais variáveis. No entanto, pretende-se fazer uma análise variando alguns aspectos desejados e tornando constante os demais. Em alguns casos, variamos um parâmetro específico, de modo a identificar qual a influência desse parâmetro no comportamento da função.

A taxa de decaimento  $\lambda$ , que é dada pelas Equações 29 e 58, depende da energia da partícula emitida  $E$ , do número atômico do núcleo pai  $Z$ , do número de massa do núcleo pai  $A$  e da profundidade do poço de potencial nuclear  $V_0$ . Por sua vez,  $E$  depende de  $Z$  e  $A$  de modo não usual. Assim, não é fácil representar  $\lambda$  graficamente usando todas as variáveis envolvidas. Para um dado valor de  $Z$  (um elemento específico), a energia de radiação vai mudar (com  $A$ ) para seus isótopos. Assim, para simplificar a representação gráfica da taxa de decaimento, variamos apenas um parâmetro por vez.

Variando o número atômico  $Z$ , obtemos a curva da Figura 3. Apesar do número atômico ser descontínuo em números inteiros, optamos por fazer uma representação "contínua" para facilitar a visualização gráfica do comportamento qualitativo da taxa de decaimento com respeito ao número atômico:

**Figura 3** – Comportamento qualitativo da taxa de decaimento com relação ao número atômico do núcleo pai

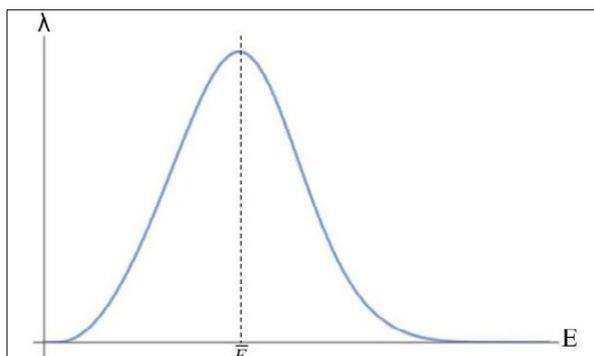


Fonte: Autores

A Figura 3 mostra que há um valor de corte para que ocorra a emissão alfa. Como consideramos que a partícula já existe dentro do núcleo e o processo de emissão apenas a desprende do potencial nuclear e coulombiano, para núcleos com  $Z$  pequeno, o núcleo pai é mais estável e a probabilidade de emissão é pequena. Esse comportamento explica a afirmação feita no início do trabalho quando apresentamos o decaimento alfa como exclusivo para os núcleos com  $Z > 82$ . Por outro lado, pela Equação 64, para número de massa  $A < 4$ , a partícula seria emitida com energia negativa, de modo que seria impossível existir emissão alfa para  $A < 4$ . É evidente, ainda, um máximo da função em  $Z = \bar{Z}$  e, portanto, deve haver um elemento químico cuja probabilidade de emissão seja máxima com relação aos outros.

Por outro lado, para um  $Z$  fixo, podemos variar  $E$  para obter a taxa de decaimento com relação à energia da partícula emitida, como mostra a Figura 4.

**Figura 4** – Comportamento qualitativo da taxa de decaimento com relação à energia da partícula alfa emitida



Fonte: Autores

Analisando o comportamento da função, verificamos que é um comportamento gaussiano, com um pico em  $E = \bar{E}$ . Como a taxa de decaimento é aproximadamente proporcional à probabilidade de emissão, podemos interpretar  $E$  como a energia mais provável para a partícula emitida por um núcleo com número atômico  $Z$ , número de massa  $A$  e potencial nuclear  $V_0$ .

Não é fácil de visualizar graficamente a energia da partícula  $\alpha$  com respeito a todos os parâmetros de dependência, pois a Equação 64 nos mostra que essa energia depende do número de massa, mas note que a Equação 62 nos fala que depende também do número atômico. Assim, para diferentes elementos, teremos radiação com energia diferente. Por outro lado, para um mesmo elemento, teremos radiação com energia diferente para seus isótopos. French e Taylor (2003) mostram os valores para algumas das variáveis aqui estudadas. Na Tabela 1, é possível identificar a energia da radiação, tempo de meia vida e taxa de decaimento para diferentes núcleos na série de decaimento de Tório:

**Tabela 1** – Energias, taxa de decaimento e tempo de meia vida de alguns núcleos

Núcleo pai	E(Mev)	$T_{1/2}$	$\lambda(s^{-1})$
$^{90}\text{Th}^{232}$	4,05	$1,39 \times 10^{10}\text{a}$	$1,5 \times 10^{-18}$
$^{90}\text{Th}^{228}$	5,52	1,9a	$1,16 \times 10^{-8}$
$^{88}\text{Ra}^{226}$	4,88	$1,62 \times 10^3\text{a}$	$1,36 \times 10^{-11}$
$^{86}\text{Rn}^{222}$	5,59	3,83d	$2,1 \times 10^{-6}$
$^{84}\text{Po}^{218}$	6,12	3,05m	$3,78 \times 10^{-3}$
$^{84}\text{Po}^{216}$	6,89	0,16s	4,33
$^{84}\text{Po}^{214}$	7,83	$1,5 \times 10^{-4}\text{s}$	$4,23 \times 10^3$
$^{84}\text{Po}^{212}$	8,95	$3 \times 10^{-7}\text{s}$	$2,31 \times 10^6$

Fonte: French e Taylor (2003)

Com a Tabela 1, podemos ver uma tendência de crescimento do tempo de meia vida com relação ao número de massa para os núcleons estudados por French e Taylor, assim como uma queda da taxa de decaimento e na energia da radiação emitida. O mesmo comportamento da taxa de decaimento é observado na energia.

## 8 Conclusão

Os resultados encontrados por este estudo mostram que a atividade radioativa de um núcleo assim como sua lei de decaimento variam exponencialmente com o tempo e dependem da sua taxa de decaimento  $\lambda$ . Para encontrar essa taxa, fizemos uso do efeito de tunelamento quântico e esta ferramenta se mostrou satisfatória ao passo que o comportamento de  $\lambda$  encontrado confere com o da teoria já estabelecida (FRENCH; TAYLOR, 2003).

A probabilidade de decaimento, dada na Equação 58, depende da massa reduzida do sistema, da energia de radiação emitida, da profundidade do poço de potencial do núcleo, do raio nuclear e do número atômico do núcleo pai. Por sua vez, a massa reduzida e o raio nuclear (Equações 34 e 27, respectivamente) dependem do número de massa do núcleo pai. Assim, a taxa de decaimento muda para diferentes elementos e, mesmo para um elemento fixo, muda para seus isótopos (RASMUSSEN, 1959b).

Apesar da relação entre a energia da radiação emitida e o número de massa do núcleo pai não estar explícita neste ensaio, a Tabela 1 mostra uma tendência dessa energia decair exponencialmente com  $A$ . Quando olhamos para isótopos de um dado núcleo, vemos que a taxa de decaimento, assim como a energia da radiação, aumenta com a diminuição do número de massa (LAZAREV; LOBANOV; OGANESYAN, 1995). Por outro lado, o tempo de meia vida decai junto com esse parâmetro. Tal comportamento se dá devido ao aumento da instabilidade do elemento com a diminuição de número de nêutrons no núcleo, aumentando assim a repulsão coulombiana entre os prótons (RASMUSSEN, 1959a).

A Figura 3 mostra que existe um  $Z_0$  mínimo para que ocorra decaimento alpha, mas que  $\lambda$  tende a zero para grandes valores de  $Z$ , pois, para átomos muito pesados, outros tipos de decaimento são mais favorecidos energeticamente. Podemos exemplificar isso pelo fato de a distância  $R_c - R_0$  ser cada vez maior para números atômicos grandes, em que a probabilidade de decaimento tende a zero.

Com isso, o presente ensaio obteve êxito em deduzir a teoria do decaimento alpha por aproximações e tunelamento quântico. Futuramente, esse estudo pode ser estendido, permitindo que o potencial nuclear  $V_0$  seja variável, considerando de modo mais fiel as forças intranucleares.

## REFERÊNCIAS

- ABRAMOWITZ, M.; STEGUN, I. A. Handbook of mathematical functions: with formulas, graphs, and mathematical tables. New York: Dover Publications, 1965.
- AGRELLO, D. A. Efeito Túnel em Reações Nucleares. 1992. Tese (Doutorado em Física) — Universidade Estadual Paulista, São Paulo, 1992.
- ANGELO, M. de S. George Gamow: O Universo Primordial. [S.l.], 2016. Disponível em: <http://lilith.fisica.ufmg.br/~dsoares/ensino/1-07/mateus-gamow.htm>. Acesso em: 3 abr. 2019.
- EISBERG, R.; RESNICK, R. Física Quântica: Átomos, Moléculas, Sólidos, Núcleos e Partículas. 29. ed. Rio de Janeiro: Campus, 1979.
- FRENCH, A. P.; TAYLOR, E. F. Introducción a la Física Cuántica. 4. ed. Barcelona: Editorial Reverté, 2003.
- GRIFFITHS, D. J. Mecânica Quântica. 2. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2011.
- LAZAREV, Y. A.; LOBANOV, Y. V.; OGANESYAN, Y.. Alpha decay of  $^{273}110$ : shell closure at  $N=162$ . California: JINR, 1995.
- MANG, H. Alpha decay. Annual Review of Nuclear Science, Palo Alto, v. 14, n. 1, p. 1-26, 1964.
- NUSSENZVEIG, H. M. Curso de Física Básica: Ótica, Relatividade, Física Quântica. 1. ed. São Paulo: Blucher, 1998.
- PARKHOMENKO, A.; SOBICZEWSKI, A. Phenomenological formula for alpha-decay half-lives of heaviest nuclei. Acta physica polonica B, v. 36, p. 3095, 2005.
- PEDRON, I. T.; MENDES, R. Equações não lineares, método wkb generalizado e aplicação a equação de thomas-fermi. Revista Brasileira de Ensino de Física, Sao Paulo, v. 30, n. 1, p. 1309.1-1309.5, 2008. DOI: <http://dx.doi.org/10.1590/S1806-11172008000100010>. Disponível em: [http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172008000100010&script=sci\\_abstract&lng=pt](http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S1806-11172008000100010&script=sci_abstract&lng=pt). Acesso em: 20 ago. 2019.
- RASMUSSEN, J. O. Alpha-decay barrier penetrabilities with an exponential nuclear potential: even-even nuclei. Physical Review, v. 113, n. 6, p. 1593-1598, 1959a. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.113.1593>. Disponível

em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.113.1593>. Acesso em: 20 ago. 2019.

RASMUSSEN, J. Alpha-decay barrier penetrabilities with an exponential nuclear potential: odd-mass nuclei. *Physical Review*, v. 115, n. 6, p. 1675-1679, 1959b. DOI: <https://doi.org/10.1103/PhysRev.115.1675>. Disponível em: <https://journals.aps.org/pr/abstract/10.1103/PhysRev.115.1675>. Acesso em: 20 ago. 2019.

SAKURAI, J. J.; NAPOLITANO, J. *Modern quantum mechanics*. [S.l.]: Pearson Harlow, 2014.

SAMANA, A. R. *Tópicos de física nuclear*. [S.l.], 2012. Disponível em: <http://nead.uesc.br/arquivos/Fisica/fisica-nuclear/FisNuc3-4a.pdf>. Acesso em: 15 abr. 2019.

TIPLER, P. A.; LLEWELLYN, R. A. *Física Moderna*. 5. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2013.

TIPLER, P. A.; MOSCA, G. *Física para cientistas e engenheiros*. 6. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2009.