

Estudo de deslocamentos em placas utilizando um elemento sólido de baixa ordem enriquecido com modos incompatíveis

Erijohnson da Silva Ferreira^[1], Sebastião Simão da Silva^[2], Cícero de Souza Nogueira Neto^[3], Jailton Ferreira Moreira^[4], Adenilda Timóteo Salviano^[5]

[1] erijohnsonf@gmail.com [2] sebastiao.silva@ifpb.edu.br [3] cicero.nogueira@ifpb.edu.br [4] jailton.moreira@gmail.com [5] adenilda_01@yahoo.com.br, IFPB.

RESUMO

O trabalho propõe-se a estudar o deslocamento em placas, de características de geometria e carregamentos diversos. Executa-se a implementação computacional de um elemento finito sólido hexaédrico de 8 nós. Posteriormente, este elemento é aprimorado através de modos incompatíveis, a fim de melhorar o desempenho do elemento em situações de esforços multiaxiais, comumente presentes em placas. Então, são executadas análises comparativas com o propósito de estudar o desempenho do algoritmo desenvolvido e comparar seus resultados com os valores finais de análises feitas por outros autores e com os resultados obtidos a partir da modelagem das placas em software comercial. As análises se dão no âmbito estático, linear e elástico. Verifica-se que o enriquecimento do elemento sólido hexaédrico de oito nós, de baixa ordem, melhora significativamente seu desempenho em análises de placas, tornando-o uma alternativa viável para a aplicação.

Palavras-chave: Método dos Elementos Finitos. Modos incompatíveis. Placas.

ABSTRACT

The work proposes to study the displacement in plates, characteristics of geometry and diverse loads. The computational implementation of an 8-node hexahedral solid finite element is performed. After that, this element is enhanced through incompatible modes in order to improve the performance of the element in situations of multiaxial stresses, commonly present on plates. Then, we perform comparative analyzes with the purpose of studying the performance of the developed algorithm and compare its results with the final values of analyzes made by other authors, and with the results obtained by the modeling of the plates in commercial software. The analyzes take place in the static, linear and elastic range. It has been found that the enrichment of the low-order eight-node hexahedral solid element significantly improves its performance in plate analyzes, making it a viable alternative to the application.

Keywords: *Finite element method. Incompatible modes. Plates.*

1 Introdução

As placas são estruturas comumente vistas em aplicações na Engenharia, desde chapas, empregadas na estrutura de máquinas, a lajes, elemento estrutural de grande importância na construção civil. Existem diversas aplicações que fazem uso de placas das mais diversas geometrias, submetidas a variadas configurações de carregamento.

São definidas como estruturas nas quais uma de suas dimensões (espessura) é muito menor que as outras (largura e comprimento). Dessa forma, uma placa pode ser vista como uma estrutura de caráter bidimensional, também referidas como estruturas de superfície.

As placas requerem soluções analíticas complexas para a obtenção de seus esforços solicitantes, com emprego de equações diferenciais de quarta ordem e soluções via séries, como a Solução de Navier ou Solução de Levy. A complexidade da solução analítica varia de acordo com a complexidade geométrica da placa, bem como de suas condições de contorno. Considerando que a solução analítica de placas com condições de carregamento e contorno simples já apresenta elevado grau de complexidade, a análise de placas submetidas a condições menos comuns pode se tornar ainda mais complicada.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é um método numérico amplamente empregado na análise de estruturas de diferentes tipos, incluindo placas. Seu conceito consiste na discretização do domínio da estrutura em elementos, resultando na composição de uma malha de elementos finitos. Os elementos presentes na malha interagem entre si através de seus nós, quando a estrutura é submetida a uma condição de carregamento. A interação dos elementos resulta em uma análise numérica que retorna resultados aproximados para a condição geométrica e de carregamento submetida. Dessa forma, o MEF é um método numérico que entrega resultados que se aproximam das soluções obtidas através dos métodos analíticos. A qualidade da aproximação está diretamente relacionada a dois fatores: o tipo de elemento utilizado na análise e a qualidade da malha gerada.

Há diversos tipos de elementos disponíveis a serem empregados em uma análise via MEF; sua utilização depende da geometria da estrutura a ser analisada. Entre esses tipos, pode-se citar elementos unidimensionais como barra e viga, elementos

bidimensionais como o elemento quadrilátero e elementos tridimensionais como hexaédrico e tetraédrico. Outro aspecto importante quando levamos em consideração o tipo de elemento para a análise é sua formulação. Elementos com uma maior quantidade de nós ou que têm em sua formulação a aplicação de alguma tecnologia de melhoramento apresentam resultados melhores dependendo do tipo de análise.

A qualidade da malha gerada é o segundo fator que implica diretamente na acurácia dos resultados. Uma malha com maior quantidade de elementos retorna resultados melhores, entretanto a um custo computacional mais elevado. Isto, aliado ao uso de elementos de ordem superior, pode aumentar o custo computacional exponencialmente. Dessa forma, a geração da malha para a análise requer a escolha inteligente do tipo de elemento (ou elementos) a ser utilizado e sua quantidade, que pode variar em pontos específicos da estrutura de acordo com a demanda de qualidade de resultados para estas áreas.

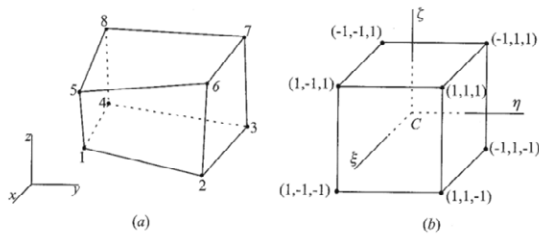
Para a análise de placas utilizando o MEF, geralmente emprega-se o elemento quadrilátero, conhecido também como elemento de placa. Trata-se de um elemento que apresenta bons resultados para esta aplicação, visto que sua formulação foi desenvolvida para este fim, em que os carregamentos e condições de contorno são aplicados tendo como referência o plano médio da estrutura, e os deslocamentos são computados no plano de referência (FERREIRA, 2009). Entretanto, a proposta deste trabalho é a aplicação do elemento sólido hexaédrico enriquecido com modos incompatíveis na análise de placas no âmbito linear e elástico, demonstrando sua eficácia para este tipo de aplicação.

O elemento sólido hexaédrico é caracterizado como trilinear, tendo, portanto, geometria tridimensional. O elemento utilizado neste projeto tem 8 nós, localizados em cada um de seus vértices. Por essa quantidade ser consideravelmente baixa em relação a outros tipos de elemento, ele pode ser considerado como de baixa ordem. O sólido apresenta módulo de elasticidade E e coeficiente de Poisson ν , de acordo com as características do material da estrutura analisada.

Esse elemento é mapeado para um hexaedro através do uso de coordenadas naturais ξ , η , e μ , portanto apresenta funções de forma em termos de coordenadas naturais (KATTAN, 2008). Estas funções são lineares, assim, o elemento padrão apresenta maior rigidez quanto à representação de estados

de carregamento flexionais. Para isso, a inserção de modos incompatíveis melhora significativamente seu desempenho pela natureza quadrática de suas funções interpoladoras adicionais. A Figura 1 apresenta uma representação do elemento mapeado em coordenadas cartesianas e naturais.

Figura 1 – Elemento sólido hexaédrico de 8 nós. a) elemento sólido hexaédrico de 8 nós; b) elemento sólido hexaédrico de 8 nós mediante a transformação de coordenadas cartesianas para coordenadas naturais



Fonte: Vázquez e López (2001)

Para o projeto, foi desenvolvido um algoritmo próprio denominado *SolidAnalysis*, capaz de analisar estruturas através do uso do elemento sólido hexaédrico padrão e com modos incompatíveis. Diversos tipos de placas são analisados e têm seus resultados comparados para a análise utilizando o elemento sólido padrão, sua versão melhorada com modos incompatíveis e os resultados obtidos através do software comercial ABAQUS®. Este programa utiliza o MEF como base em suas análises, fazendo uso do elemento C3D8I, também dotado de modos incompatíveis em sua formulação.

2 Referencial teórico

2.1 Formulação do elemento hexaédrico de oito nós padrão

As funções de deslocamento para um elemento isoparamétrico são dadas por

$$u(x, y, z) = \sum N_i(\xi, \eta, \mu) u_i \quad (1a)$$

$$v(x, y, z) = \sum N_i(\xi, \eta, \mu) v_i \quad (1b)$$

$$w(x, y, z) = \sum N_i(\xi, \eta, \mu) w_i \quad (1c)$$

em que ξ , η e μ são as coordenadas para os eixos naturais. As coordenadas cartesianas em qualquer ponto do elemento são

$$x = \sum N_i(\xi, \eta, \mu) x_i \quad (2a)$$

$$y = \sum N_i(\xi, \eta, \mu) y_i \quad (2b)$$

$$z = \sum N_i(\xi, \eta, \mu) z_i \quad (2c)$$

e suas funções de forma, também conhecidas como funções de interpolação, são dadas por

$$N_1 = 1/8(1 - \xi)(1 - \eta)(1 + \mu) \quad (3a)$$

$$N_2 = 1/8(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \mu) \quad (3b)$$

$$N_3 = 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \mu) \quad (3c)$$

$$N_4 = 1/8(1 - \xi)(1 + \eta)(1 + \mu) \quad (3d)$$

$$N_5 = 1/8(1 + \xi)(1 - \eta)(1 + \mu) \quad (3e)$$

$$N_6 = 1/8(1 + \xi)(1 - \eta)(1 - \mu) \quad (3f)$$

$$N_7 = 1/8(1 + \xi)(1 + \eta)(1 - \mu) \quad (3g)$$

$$N_8 = 1/8(1 + \xi)(1 + \eta)(1 + \mu) \quad (3h)$$

O Jacobiano do elemento é expresso pela matriz

$$[J_e] = \sum \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Assim, a matriz de deformação do elemento é

$$[B_e] = [I^\alpha][J_e^{-1}][\partial N^\alpha] \quad (5)$$

expressa de maneira explícita, como sendo

$$[B_e] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \quad (6)$$

A matriz constitutiva para 3 dimensões, levando em consideração as características do material, o módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν , é

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & & & \\ \nu & 1-\nu & \nu & & & \\ \nu & \nu & 1-\nu & & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dessa forma, a matriz de rigidez do elemento sólido hexaédrico de 8 nós é dada por

$$[K_e] = \iiint_{-1-1-1}^{111} |B_e|^T |D| |B_e| \det(J) d\xi d\eta d\mu \quad (8)$$

Assim, pode-se calcular os deslocamentos da estrutura, sendo

$$\{F\} = [K] \cdot \{U\} \quad (9)$$

em que $\{F\}$ é o vetor contendo as forças aplicadas em cada um dos graus de liberdade dos nós da estrutura (3 graus de liberdade por nó para o elemento hexaédrico), $[K]$ é a matriz de rigidez global da estrutura, e $\{U\}$ é o vetor de deslocamentos dos graus de liberdade nodais.

2.2 Formulação para modos incompatíveis

A energia de deformação de um corpo elástico é definida por

$$U = \frac{1}{2} \int_V \{d^T B_u^T + \alpha^{*T} B_\alpha^T\} [D] \{B_u d + B_\alpha \alpha^*\} dV \quad (10)$$

que quando derivada em relação aos deslocamentos d e aos parâmetros α^* resulta nas equações de equilíbrio do elemento expressas por

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\alpha} \\ K_{\alpha u} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \alpha^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

em que q é o vetor de forças nodais equivalentes, e α^* é

$$\{\alpha^*\} = [K_{\alpha\alpha}^{-1}] [K_{\alpha u}^T] \{d\} \quad (12)$$

Assim, as submatrizes de rigidez do sistema são definidas pelas equações

$$[K_{uu}] = \int_V [B^T] [D] [B] dV \quad (13a)$$

$$[K_{u\alpha}] = \int_V [B^T] [D] [B_\alpha] dV \quad (13b)$$

$$[K_{\alpha u}] = \int_V [B_\alpha^T] [D] [B] dV \quad (13c)$$

$$[K_{\alpha\alpha}] = \int_V [B_\alpha^T] [D] [B_\alpha] dV \quad (13d)$$

em que B_α é a matriz deformação-deslocamento para modos incompatíveis, expressa por

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & 0 \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} \\ \dots & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial z} \\ \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial x} \\ \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} \\ \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial y} \end{bmatrix}$$

para os quais M_1 , M_2 e M_3 são as funções de interpolação para modos incompatíveis, expressas por

$$M_1 = 1 - \xi^2 \quad (15a)$$

$$M_2 = 1 - \eta^2 \quad (15b)$$

$$M_3 = 1 - \mu^2 \quad (15c)$$

Estas funções de forma, juntamente com o vetor de deslocamentos generalizados da formulação incompatível, são responsáveis por acrescentar aos deslocamentos no interior do elemento (u_u) uma parcela de deslocamentos incompatível (u_α). Dessa forma, os deslocamentos para o elemento se tornam

$$u = u_u + u_\alpha = [N]\{d\} + [M]\{\alpha\} \quad (16)$$

Retornando à equação (14), após a derivação dos termos, tem-se

$$B_\alpha = \begin{bmatrix} -2\xi\bar{J}_{0_{11}} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{12}} & 0 \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{21}} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{22}} \\ 0 & 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{31}} & 0 & 0 \\ -2\xi\bar{J}_{0_{21}} & -2\xi\bar{J}_{0_{11}} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{22}} & -2\eta\bar{J}_{0_{12}} \\ -2\xi\bar{J}_{0_{31}} & 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{11}} & -2\eta\bar{J}_{0_{32}} & 0 \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{0_{31}} & -2\xi\bar{J}_{0_{21}} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0_{32}} \\ 0 & -2\mu\bar{J}_{0_{13}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\mu\bar{J}_{0_{23}} & 0 & 0 \\ -2\eta\bar{J}_{0_{32}} & 0 & 0 & -2\mu\bar{J}_{0_{33}} & 0 \\ \dots & 0 & -2\mu\bar{J}_{0_{23}} & -2\mu\bar{J}_{0_{13}} & 0 \\ -2\eta\bar{J}_{0_{12}} & -2\mu\bar{J}_{0_{33}} & 0 & -2\mu\bar{J}_{0_{23}} & 0 \\ -2\eta\bar{J}_{0_{32}} & 0 & -2\mu\bar{J}_{0_{33}} & -2\mu\bar{J}_{0_{13}} & 0 \end{bmatrix} \quad (17)$$

em que ξ , η e μ são os valores das coordenadas de Gauss para cada nó, e os coeficientes J_0 são os valores do Jacobiano avaliado no centroide do elemento, onde as coordenadas ξ , η e μ assumirão valor igual a zero. Sendo assim, a matriz de rigidez do elemento será dada pela expressão

$$[K] = [K_{uu}] - [K_{ua}][K_{ua}^{-1}][K_{au}] \quad (18)$$

Dessa forma, obtidos a matriz de rigidez global da estrutura e o vetor de forças nodais, segue-se o cálculo dos deslocamentos para o elemento hexaédrico enriquecido com modos incompatíveis.

3 Implementação computacional – Passo a passo

A formulação descrita anteriormente teve sua implementação computacional executada mediante algoritmo próprio desenvolvido. Dispõe-se, nos subtópicos a seguir, do passo a passo contendo todas as informações sobre a forma de implementação da rotina, para o elemento sólido hexaédrico com modos incompatíveis

3.1 Entrada de dados

Há uma limpeza inicial das variáveis. São inseridas as características do material: Módulo de Elasticidade e Coeficiente de Poisson.

3.2 Matriz constitutiva

Cálculo da matriz constitutiva C para 3 dimensões usando as características de material previamente obtidas.

3.3 Geração de malha

São inseridos os números de elementos em x, y e z. A partir disso, é calculado o número total de elementos da malha. São inseridas as coordenadas nodais e conectividades nodais. O número total de nós da malha é obtido. O número total de graus de liberdade é obtido.

3.4 Matriz de rigidez

Cálculo da matriz de rigidez através de função chamada a partir do código base. Seus dados de entrada são:

- Número total de graus de liberdade;
- Número total de elementos da malha;
- Conectividades nodais;
- Número total de nós;
- Coordenadas nodais;
- Matriz constitutiva para 3 dimensões.

3.4.1 Inicialização da matriz de rigidez global

A variável que receberá a matriz de rigidez global é inicializada. Esta é uma matriz quadrada, cuja dimensão é dada pelo número de graus de liberdade da estrutura.

3.4.2 Pesos e coordenadas de Gauss

A função que contém os pesos e coordenadas de Gauss é chamada. Os dados são armazenados em variáveis.

3.4.3 Graus de liberdade dos elementos

É iniciado um laço para cada elemento, que começa com a coleta dos seus respectivos graus de liberdade. A partir deste ponto é iniciada uma análise individual de cada elemento.

Estes são organizados de forma a se disporem em um vetor onde cada trio de valores representa um nó, sendo o primeiro valor do trio o grau de liberdade no

eixo x, o segundo é o grau de liberdade no eixo y, e o terceiro é o grau de liberdade no eixo z. Sua dimensão final é 1x24.

Nesse momento são inicializadas as matrizes de rigidez incompatíveis (K_{ua} , K_{au} e K_{aa}), que precisam ser reinicializadas a cada novo elemento.

3.4.4 Ciclo sobre os pontos de Gauss

As rotinas a seguir serão repetidas para cada um dos 8 pontos de Gauss do elemento, em um laço de *for*.

São obtidas as coordenadas para o ponto de Gauss em questão. O primeiro valor é obtido como o valor no eixo ξ , o segundo como valor no eixo η e o terceiro como valor no eixo μ , respectivamente.

3.4.4.1 Funções de forma e derivadas

A função que calcula os valores de funções de forma, derivadas naturais e funções de forma e derivadas naturais avaliadas no centroide do elemento é iniciada. Seus dados de entrada são os valores das coordenadas de Gauss do ponto de Gauss em questão, para os três eixos de coordenadas naturais (ξ , η , e μ).

As funções de forma e as derivadas naturais são calculadas. As funções de forma avaliadas no centroide do elemento, bem como as derivadas naturais sob as mesmas condições, são calculadas.

3.4.4.2 Jacobiano e derivadas cartesianas

As coordenadas nodais do elemento em questão são obtidas. A função para cálculo do Jacobiano é iniciada. Seus dados de entrada são:

- Coordenadas nodais do elemento atual;
- Derivadas naturais das funções de forma;
- Derivadas naturais das funções de forma avaliadas no centroide do elemento.

São calculados o Jacobiano, sua inversa e as derivadas cartesianas. Estes também são calculados para as coordenadas do centroide do elemento.

3.4.4.3 Composição da matriz B

A matriz B é calculada para o ponto de Gauss em questão.

3.4.4.4 Composição da matriz B_α

A matriz B_α é calculada para o ponto de Gauss em questão.

3.4.4.5 Matriz de rigidez do elemento

A matriz de rigidez do elemento em questão começa a ser calculada, através da indexação dos valores de rigidez para cada um dos pontos de Gauss, ponto a ponto, iniciando com o ponto de Gauss em questão. Ela é armazenada na matriz de rigidez global da estrutura.

3.4.4.6 Matrizes de Rigidez para Modos Incompatíveis

As matrizes de rigidez para o cálculo das parcelas referentes aos modos incompatíveis (K_{ua} , K_{au} e K_{aa}) são calculadas para o ponto de Gauss em questão.

3.4.5 Matriz de rigidez global

A partir dos valores da matriz de rigidez do elemento e das matrizes de rigidez para modos incompatíveis, a matriz de rigidez incrementada é calculada. Ela é inserida na matriz de rigidez global da estrutura, de acordo com os graus de liberdade do elemento em questão. O laço retorna ao passo 3.4.3, até que todos os elementos tenham suas matrizes de rigidez calculadas e inseridas na matriz de rigidez global.

3.5 Condições de contorno

Os deslocamentos nulos e/ou prescritos são inseridos. As forças, bem como as informações sobre a natureza de sua atuação na estrutura, são inseridas.

3.6 Aplicação das condições de contorno

A função para aplicação das condições de contorno é iniciada. Esta é responsável por adequar o vetor de forças e a matriz de rigidez global às condições de contorno da análise.

3.7 Cálculo dos deslocamentos

Os deslocamentos são calculados e obtidos para cada grau de liberdade de cada nó da estrutura.

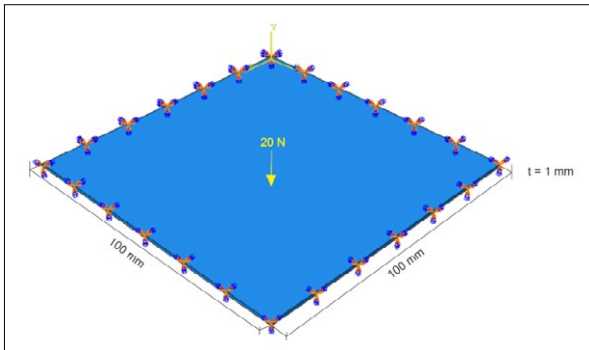
4 Exemplos numéricos

As análises foram executadas no âmbito linear e elástico. Serão analisados os deslocamentos para diferentes formas de placas, e seus resultados foram comparados aos provenientes de modelagem e análise executadas através de software comercial ABAQUS®.

4.1 Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central

A placa apresenta comprimento e largura iguais, sendo $L = 100$ mm. Sua espessura é $t = 1$ mm. Uma representação desta pode ser vista na Figura (2). O módulo de elasticidade do seu material é $E = 10^4$ N/mm² e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. A placa é submetida a uma carga pontual $P = 20$ N em seu centro. Por conta da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi discretizado para a análise. São adotadas 4 malhas com $N_e = 4$ ($2 \times 2 \times 1$), 16 ($4 \times 4 \times 1$), 64 ($8 \times 8 \times 1$) e 256 ($16 \times 16 \times 1$) elementos.

Figura 2 – Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central



Fonte: Autores (2019)

A Tabela (1) apresenta os valores de deslocamento no centro da placa, para cada uma das malhas. Foram comparados os valores obtidos por Silva e Silva (2017), analisados via software ABAQUS® e via algoritmo próprio (SolidAnalisys) para o elemento sólido padrão e para o elemento sólido com modos incompatíveis, sendo sua solução analítica (valor teórico) dada por Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959).

Tabela 1 – Valor dos deslocamentos (mm)

Placa quadrada engastada em suas 4 bordas com carga pontual central						
Nº de elem.	Silva & Silva		ABAQUS®	SolidAnalisys		Valor Teórico
	H8	H8INCOMP	C3D8I	H8	H8INCOMP	
4	-0.00835	-0.08972	-0.0899	-0.00835	-0.08971	-1,22304
16	-0.03076	-0.67638	-0.6802	-0.03076	-0.67638	-1,22304
64	-0.10980	-1.15123	-1.1543	-0.1098	-1.15122	-1,22304
256	-0.32825	-1.22092	-1.2221	-0.32825	-1.22092	-1,22304

Fonte: Autores (2019)

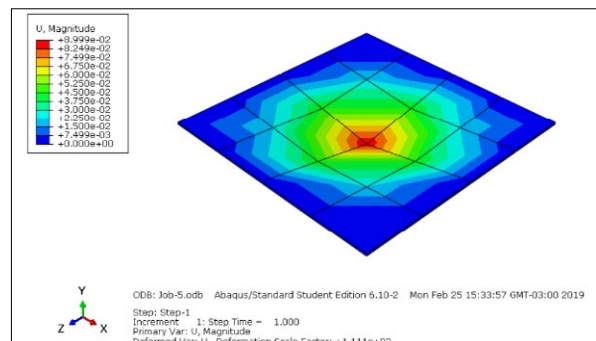
Pode-se observar que os valores obtidos via SolidAnalisys são consistentes e aproximam-se bem dos valores encontrados por Silva e Silva (2017) para

o elemento sólido padrão, demonstrando a eficácia da implementação computacional executada no projeto. Entretanto, é visto que os valores obtidos para o elemento padrão são consideravelmente distantes do valor teórico obtido via método analítico, mesmo para malhas com maiores quantidades de elementos (64 e 256). Isso se dá porque os resultados dos deslocamentos não conseguem representar, do ponto de vista quantitativo, o comportamento físico da placa, visto que este tipo de elemento é apropriado para situações em que o elemento estrutural está sujeito apenas a tração e compressão simples (SILVA; SILVA, 2017).

Para os valores obtidos utilizando elemento sólido com modos incompatíveis, observa-se um alto ganho de desempenho em relação ao elemento sólido padrão, sendo que nas malhas com maior quantidade de elementos (64 e 256) os resultados convergem de forma satisfatória ao valor teórico encontrado. Malhas com uma menor quantidade de elementos não conseguem representar de maneira adequada o estado de esforços e deformações multiaxiais da placa; dessa forma, seus resultados são distantes da solução analítica. Os valores de deslocamento obtidos via SolidAnalisys são muito próximos daqueles obtidos por Silva e Silva (2017) e pelo software ABAQUS®, para todas as malhas consideradas.

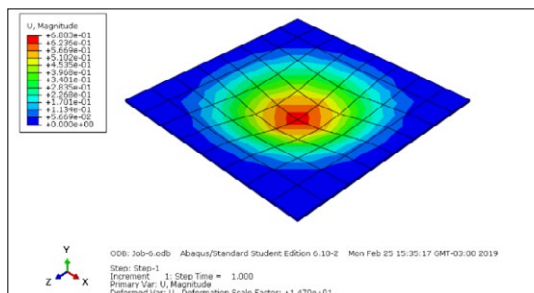
As figuras a seguir demonstram a forma deformada da placa após a aplicação do esforço, para todas as malhas, obtida via software ABAQUS®. Apesar da simetria ter sido utilizada na análise, optou-se por representar a forma deformada da placa completa para malhas menores, representando-a em apenas $\frac{1}{4}$ para a malha de 256 elementos, devido à limitação no número de elementos presente na versão estudantil do software ABAQUS®.

Figura 3 – Forma deformada para malha $N_e=4$



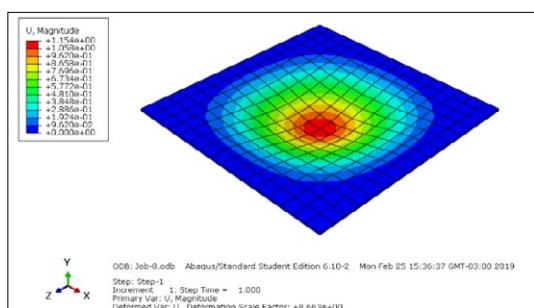
Fonte: Autores (2019)

Figura 4 – Forma deformada para malha $N_e=16$



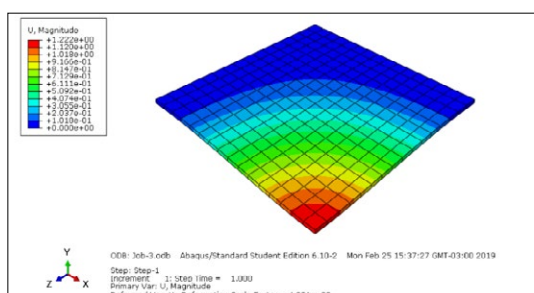
Fonte: Autores (2019)

Figura 5 – Forma deformada para malha $N_e=64$



Fonte: Autores (2019)

Figura 6 – Forma deformada para malha $N_e=256$

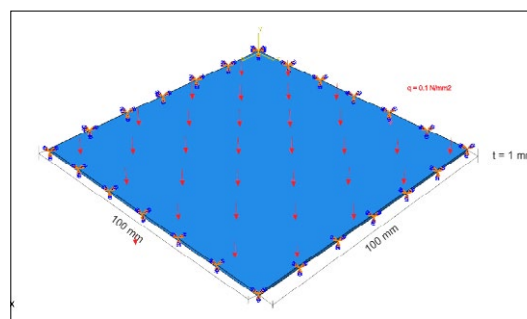


Fonte: Autores (2019)

4.2 Placa quadrada engastada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme

A placa possui as mesmas dimensões da placa anterior, com mudança apenas em sua configuração de cargas, sendo agora $q = 0.1 \text{ N/mm}^2$ – sua representação pode ser vista na Figura 7. Apresenta comprimento e largura iguais, sendo $L = 100 \text{ mm}$. Sua espessura é $t = 1 \text{ mm}$. O módulo de elasticidade do seu material é $E = 10^4 \text{ N/mm}^2$ e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. Por conta da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi discretizado para a análise. São adotadas 4 malhas com $N_e = 4$ ($2 \times 2 \times 1$), 16 ($4 \times 4 \times 1$), 64 ($8 \times 8 \times 1$) e 256 ($16 \times 16 \times 1$) elementos.

Figura 7 – Placa quadrada engastada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme



Fonte: Autores (2019)

É válido salientar que para representar a carga distribuída sobre a superfície da placa é necessária a conversão da carga por área para cargas pontuais, atuando sobre os nós da superfície do elemento. Isto é feito por meio da equação,

$$q_{nodal} = \frac{L_{el} \cdot W_{el} \cdot q_{distr.}}{4} \quad (19)$$

em que L_{el} e W_{el} são, respectivamente, o comprimento e a largura do elemento cuja superfície recebe a carga distribuída $q_{distr.}$

A Tabela 2 apresenta os valores de deslocamento no centro da placa, para cada uma das malhas. São comparados os valores obtidos por análise via software ABAQUS® e via algoritmo próprio (SolidAnalisys) para o elemento sólido com modos incompatíveis.

Tabela 2 – Valor dos deslocamentos (mm)

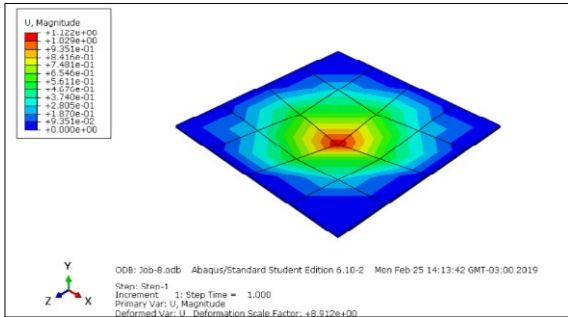
Nº de elem.	Placa quadrada engastada em suas 4 bordas submetida a carga distribuída uniforme	
	ABAQUS® C3D8I	SolidAnalisys H8INCOMP
4	-1.12214	-1.11874
16	-8.21769	-8.17216
64	-13.2725	-13.24335
256	-13.8002	-13.79233

Fonte: Autores (2019)

Os resultados da análise são quantitativamente próximos para todas as malhas nas análises feitas via ABAQUS® e via SolidAnalisys, reforçando a eficácia do algoritmo desenvolvido.

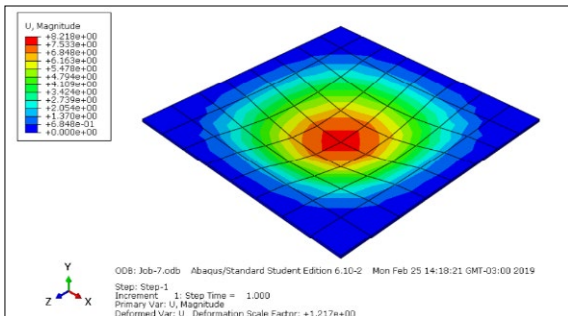
As figuras a seguir demonstram a forma deformada da placa após a aplicação do esforço, para todas as malhas, obtida via software ABAQUS®.

Figura 8 – Forma deformada para malha $N_e = 4$



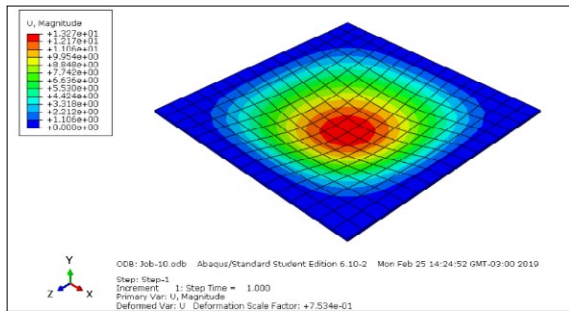
Fonte: Autores (2019)

Figura 9 – Forma deformada para malha $N_e = 16$



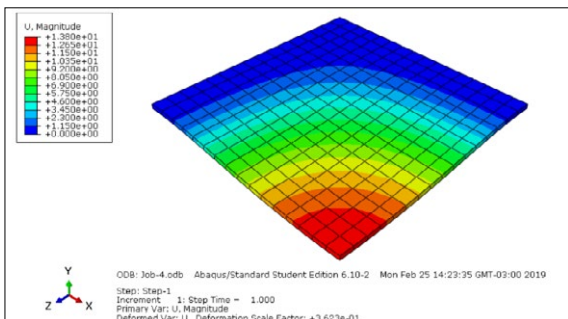
Fonte: Autores (2019)

Figura 10 – Forma deformada para malha $N_e = 64$



Fonte: Autores (2019)

Figura 11 – Forma deformada para malha $N_e = 256$

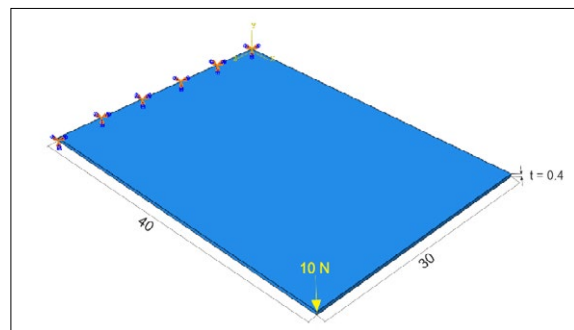


Fonte: Autores (2019)

4.3 Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas arestas

A placa apresenta comprimento $L = 40$ cm e largura $W = 30$ cm. Sua espessura é $t = 0.4$ cm. O módulo de elasticidade do seu material é $E = 1.2 \times 10^8$ N/cm², e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. São adotadas 4 malhas com $N_e = 12$ ($4 \times 3 \times 1$), 48 ($8 \times 6 \times 1$) e 192 ($16 \times 12 \times 1$) elementos. Está submetida a uma carga $P = 10$ N em uma de suas pontas livres e está engastada em uma de suas bordas. A Figura 12 exibe uma representação desta placa.

Figura 12 – Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas pontas



Fonte: Autores (2019)

A Tabela 3 apresenta os valores de deslocamento na ponta da placa onde a carga é aplicada, para cada uma das malhas. São comparados os valores obtidos por análise via software *ABAQUS®* e via algoritmo próprio (*SolidAnalysis*) para o elemento sólido com modos incompatíveis.

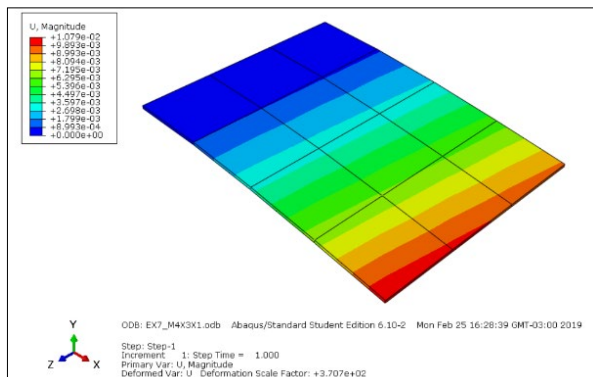
Tabela 3 – Valor dos deslocamentos em cm

Nº de elem.	Placa retangular em balanço submetida a carga pontual em uma de suas arestas	
	ABAQUS®	SolidAnalysis
12	C3D8I -0.01079	H8INCOMP -0.01079
48	-0.01246	-0.01245
192	-0.01303	-0.01303

Fonte: Autores (2019)

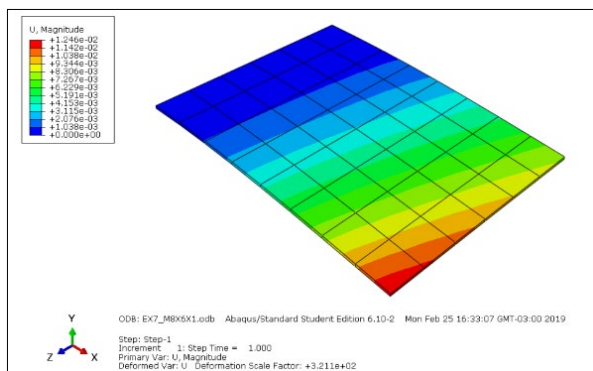
Os resultados da análise são quantitativamente próximos para todas as malhas nas análises feitas via *ABAQUS®* e via *SolidAnalysis*. As figuras a seguir demonstram a forma deformada da placa após a aplicação do esforço, para todas as malhas, obtida via software *ABAQUS®*.

Figura 13 – Forma deformada para malha $N_e = 12$



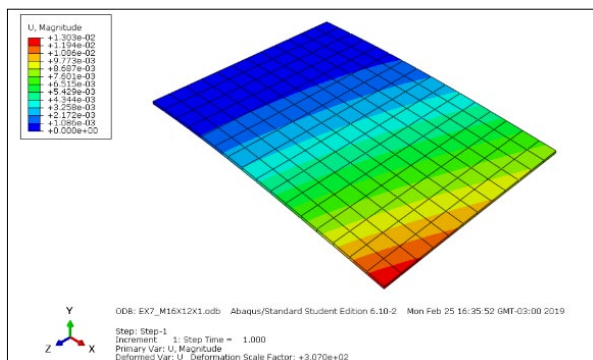
Fonte: Autores (2019)

Figura 14 – Forma deformada para malha $N_e = 48$



Fonte: Autores (2019)

Figura 15 – Forma deformada para malha $N_e = 192$



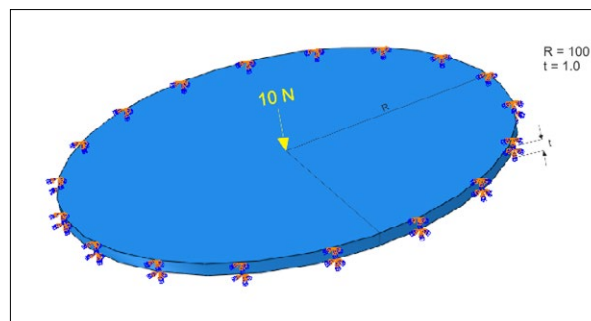
Fonte: Autores (2019)

4.4 Placa circular engastada submetida a carga pontual central

A placa apresenta raio $R = 100$ cm e espessura $t = 1.0$ cm. O módulo de elasticidade do seu material é $E = 1. \times 10^7$ N/cm², e seu coeficiente de Poisson é $\nu = 0.3$. Por conta da simetria, apenas $\frac{1}{4}$ da placa foi discretizado para a análise. São adotadas 4 malhas

com $N_e = 50$ ($5 \times 5 \times 2$), 200 ($10 \times 10 \times 2$) e 450 ($15 \times 15 \times 2$) elementos. Está submetida a uma carga $P = 10$ N em seu centro. Por conta da maior complexidade geométrica, optou-se por inserir mais elementos nas malhas, a fim de melhorar seus resultados. A Figura 16 exibe uma representação desta placa.

Figura 16 – Placa circular engastada submetida a carga pontual central



Fonte: Autores (2019)

A Tabela 4 apresenta os valores de deslocamento no centro da placa, para cada uma das malhas. São comparados os valores obtidos por análise via software ABAQUS® e via algoritmo próprio (*SolidAnalisys*) para o elemento sólido com modos incompatíveis.

Tabela 4 – Valor dos deslocamentos em cm

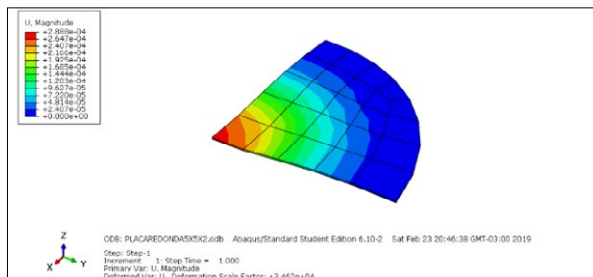
N° de elem.	Placa circular engastada submetida a carga pontual central	
	ABAQUS®	SolidAnalisys
	C3D8I	H8INCOMP
12	-0.00029	-0.00021
48	-0.00173	-0.00167
192	-0.00207	-0.00207

Fonte: Autores (2019)

Os resultados apresentam boa convergência em ambos os métodos, tornando-se mais aproximados conforme a quantidade de elementos na malha aumenta. De acordo com Duarte (2002), o resultado teórico de deslocamento no centro da placa é de $w = 0.00217525$. Assim, os resultados da análise via ABAQUS® e SolidAnalisys são razoáveis para a malha de 192 elementos, resultando em uma boa aproximação.

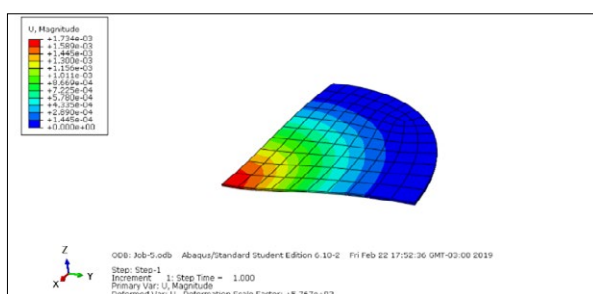
As figuras a seguir demonstram a forma deformada após a aplicação do esforço para $\frac{1}{4}$ da placa, em todas as malhas, obtida via software ABAQUS®.

Figura 17 – Forma deformada para malha $N_e = 12$



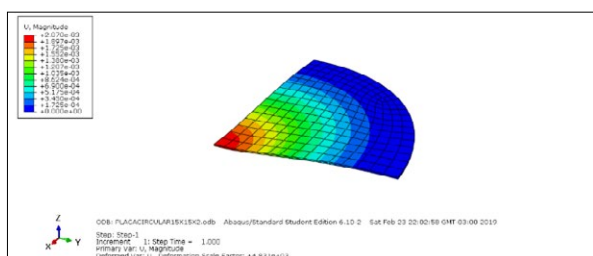
Fonte: Autores (2019)

Figura 18 – Forma deformada para malha $N_e = 48$



Fonte: Autores (2019)

Figura 19 – Forma deformada para malha $N_e = 192$



Fonte: Autores (2019)

5 Conclusão/Considerações

Comprova-se que a adição de modos incompatíveis ao elemento sólido hexaédrico de oito nós melhora de forma significativa o desempenho do elemento e, conseqüentemente, os resultados de sua aplicação na análise de placas. No estudo de superfícies, a utilização de elementos sólidos pode ser vantajosa dada a simplicidade de sua formulação (em relação a outros elementos como casca/shell). Além disso, em análises em que processos iterativos estão presentes (não linearidades geométricas e dos materiais), elementos com menos graus de liberdade são preferíveis.

O desenvolvimento de ferramentas computacionais aprimoradas continua relevante,

sobretudo em problemas complexos que seriam inviáveis de solucionar analiticamente ou que teriam uma solução analítica relativamente complexa, como no caso das placas estudadas aqui. A criação de algoritmos agrega grande praticidade na resolução de problemas extensos – que envolvem o tratamento de uma quantidade relativa de variáveis –, tornando possível a obtenção de resultados consistentes em uma quantidade de tempo baixa, se comparada à possível tentativa de resolução analítica.

Assim, o estudo de estruturas utilizando métodos numéricos, como o MEF, é de extrema importância no desenvolvimento das Engenharias que lidam com a temática. Com a difusão dos conhecimentos acerca das formulações e aplicação dos métodos, é possível fomentar o desenvolvimento tecnológico da área e melhorar de forma significativa o desempenho das análises.

REFERÊNCIAS

DA SILVA, S. S.; SILVA, W. T. M. Aplicação do Método dos Modos Incompatíveis na Análise de Peças Fletidas. **Science & Engineering Journal**, v. 26, n. 1, p. 27-37, 2017. DOI: <https://doi.org/10.14393/19834071.v26.n1.2017.37718>. Disponível em: <http://www.seer.ufu.br/index.php/cieng/article/view/37718>. Acesso em: 25 jun. 2018

DUARTE, L. A. F. **Análise Estática e Dinâmica, Linear e Não-Linear Geométrica, através de Elementos Hexaédricos de Oito Nós com um Ponto de Integração**. 2002. Dissertação (Mestrado em Engenharia) – Escola de Engenharia, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002.

FERREIRA, A. J. M. **MATLAB Codes for Finite Element Analysis: Solids and Structures**. Porto: Springer, 2009.

KATTAN, P. **Matlab guide for finite elements: an interactive approach**. Berlin: Springer, 2008.

SILVA, S. S. da; SILVA, W. T. M. Aplicação do Método dos Modos Incompatíveis na Análise de Peças Fletidas. **Science & Engineering Journal**, v. 26, n. 1, p. 27-37, 2017.

TIMOSHENKO, STEPHEN P., AND SERGIUS WOINOWSKY-KRIEGER. **Theory of plates and shells**. [S.l.]: McGraw-hill, 1959.

VÁZQUEZ, M.; LÓPEZ, E. **El Método de los Elementos Finitos Aplicado al Análisis Estructural**. Madrid: Editora Noela, 2001.