

Dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática: contribuições para a abordagem da Geometria Espacial no Ensino Médio

Rafael José Alves do Rego Barros ^[1], Iran Abreu Mendes ^[2]

[1] rafael.barros@ifpb.edu.br. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba. [2] iamendes1@gmail.com. Universidade Federal do Pará.

RESUMO

O presente artigo adota como objeto de estudo dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática do Brasil, no período entre 1990 e 2010, dos programas de pós-graduação *stricto sensu* que apresentam informações históricas em tópicos de Geometria Espacial do Ensino Médio. Nosso objetivo é investigar os potenciais didáticos das Pesquisas, sugerindo encaminhamentos didáticos que possam de alguma forma ser inseridos na nossa prática docente, desde que, antes da aplicação na sala de aula, seja feito um tratamento dessas informações, para que o conteúdo possa ser ensinado da melhor maneira possível e de acordo com o potencial cognitivo dos estudantes e também com a realidade de cada ambiente escolar. Para selecionar as teses e dissertações, tomamos como referência as três tendências atuais das pesquisas em História da Matemática, de acordo com a cartografia das pesquisas nesta área, realizada por Mendes (2014). Para identificar se um trabalho abordava conteúdo do Ensino Médio, usamos como parâmetro as áreas de conhecimentos do Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM. Este artigo poderá ser útil para a disseminação dessas publicações para um público maior, no sentido de possibilitar uma divulgação dos conteúdos matemáticos que podem ser explorados para abordar conceitos de Geometria Espacial no Ensino Médio. Interessa-nos essa divulgação, pois muitas vezes essas dissertações e teses, depois de defendidas, pouco são utilizadas e são esquecidas nas bibliotecas.

Palavras-chave: Dissertações e Teses. História e Epistemologia da Matemática. Ensino Médio. Geometria Espacial.

ABSTRAT

The present article adopts as an object of study dissertations and theses in History and Epistemology of Mathematics of Brazil in the period between 1990 and 2010 of the stricto sensu postgraduate programs that present historical information on topics related to Space Geometry (High School). The objective is to investigate the didactic potential of the Research. We also suggest didactic referrals that can somehow be used in our teaching practice, provided that there is a treatment of this information before its application in the classroom so that the content can be taught in the best way possible according to students' cognitive potential and also to the reality of each school environment. In order to select the theses and dissertations, we used the three current trends in the history of mathematics, according to the cartography of the researches in this area, carried out by Mendes (2014). To identify if a study covered High School content, we used as a parameter the areas of knowledge of the National High School Examination (SEM). This article may be useful to widely disseminate these publications so as to enable the dissemination of the mathematical contents that can approach the concepts of Space Geometry in High School, for once these dissertations and theses are defended, they are forgotten in libraries.

Keywords: *Dissertations and Theses. History and Epistemology of Mathematics. High School. Spatial Geometry.*

1 Introdução

Nas últimas três décadas, houve um grande esforço de alguns pesquisadores da Educação Matemática no sentido de criar um espaço acadêmico para a História da Matemática, com o objetivo de se viabilizar a realização de pesquisas nesta área. Segundo Mendes (2012), com a criação, em 1983, do International Group on the Relations between the History and Pedagogy of Mathematics (HPM), grupo filiado à Comissão Internacional de Ensino de Matemática (ICMI) e criado durante a realização do Workshop História na Educação Matemática, ocorrido em Toronto no Canadá, começou a discussão relativa às relações entre História, Pedagogia e Sociologia da Matemática e da Educação Matemática.

As pesquisas em História da Matemática no Brasil são um pouco mais recentes, tendo se estruturado a partir de 1995 com a realização do 1º Seminário Nacional de História da Matemática e a criação da Sociedade Brasileira de História da Matemática (SBHmat), no dia 30 de março de 1999, durante o III Seminário Nacional de História da Matemática (III SNHM), na cidade de Vitória, no Espírito Santo, oportunizando, assim, a criação da Revista Brasileira de História da Matemática, de cunho internacional, cuja política editorial recebe produções acadêmicas de autores de todos os países. As publicações, tanto de pesquisadores em História da Matemática como daqueles que trabalham relacionando esta ciência à Educação Matemática e também à Filosofia da Matemática, também são feitas em outros idiomas diferentes do português. Sabemos, todavia, que alguns estudos isolados relacionados a esse tema iniciaram-se em 1990, com a volta de pesquisadores que estavam em doutoramento em outros países.

Esta pesquisa é um recorte da minha tese de Doutorado e está vinculada ao projeto de pesquisa intitulado *Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990 e 2010*, coordenada pelo professor Dr. Iran Abreu Mendes, com a finalidade principal de descrever a produção científica na área de História da Matemática nos programas de pós-graduação *stricto sensu* do país, das áreas de Educação, Educação Matemática, Ensino de Ciências Naturais e Matemática e áreas afins, com vistas a traçar uma cartografia dos estudos em História da Matemática oriundos das pesquisas realizadas pelos estudantes de pós-graduação dos

diversos programas existentes no Brasil entre 1990 e 2010, sob três dimensões: História e Epistemologia da Matemática, História da Educação Matemática e História no Ensino da Matemática, que se originou de uma proposição de classificação dos trabalhos em História da Matemática apresentados por Sad (2005), nos Anais do VI Seminário Nacional de História da Matemática. Assim, ampliaram-se os estudos sobre a produção presente nos Anais desses Seminários Nacionais entre 1995 e 2007 (MENDES, 2008), iniciando-se as atividades com a investigação das dissertações e teses em 2010.

Para a classificação dessas dimensões, foram tomados como parâmetro os seguintes critérios propostos por Mendes (2014): 1) Os trabalhos considerados de História e Epistemologia da Matemática são aqueles que tratam das produções científicas relacionadas à vida e à obra de matemáticos e ao desenvolvimento de suas ideias matemáticas bem como o desenvolvimento da área em pauta enquanto conteúdo científico; 2) Foram considerados como trabalhos de História da Educação Matemática aqueles que tratam de estudos relacionados à história de instituições, biografias de matemáticos e professores de matemática (antigos e atuais) bem como suas contribuições para a formação de professores de Matemática e para a melhoria do ensino dessa disciplina escolar, além de, certamente, contribuir para a constituição dos acervos documentais, das memórias e do patrimônio da Educação Matemática brasileira; 3) Os trabalhos agrupados na categoria de História no Ensino da Matemática foram aqueles que se caracterizam pela preocupação com fins pedagógicos, como elaboração de materiais didáticos para ensinar Matemática, usando fragmentos da História da Matemática, tomando como referência as tendências atuais das pesquisas em história da matemática. Isso justifica o período inicial pelo qual escolhemos realizar nossa pesquisa.

Considerando o que se propôs nesse projeto, decidimos tomar como objeto de estudo para esse artigo as dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática do Brasil no período entre 1990 e 2010, centrando o uso dessas informações históricas em tópicos de Geometria Espacial do Ensino Médio, com o objetivo de investigar os potenciais didáticos das Pesquisas, sugerindo encaminhamentos didáticos que possam, de alguma forma, ser inseridos na nossa prática docente, partindo do pressuposto de que os alunos devam compreender o processo de

construção da matemática em cada contexto e momento histórico específico. Para iniciar nossa exposição, vamos apresentar, em primeiro lugar, a seleção das dissertações e teses, já levantadas na pesquisa de Mendes (2015).

Quadro 01 – Dissertações e Teses relacionadas à História da Matemática (1990-2010)

Subáreas da História da Matemática	Nº de Dissertações	Nº de Teses	Total
História e Epistemologia da Matemática	38	24	62
História da Educação Matemática	135	48	183
História da Matemática para o Ensino	27	9	36
Total	200	81	281

Fonte: Mendes (2015, p.162).

Diante dessa classificação feita por Mendes (2015), selecionamos, entre os 62 trabalhos de História e Epistemologia da Matemática, aqueles que apresentavam conteúdos Matemáticos os quais separamos em dois tipos: conteúdos do Ensino Superior e conteúdos da Educação Básica, de acordo com o quadro seguir:

Quadro 02 – Distribuição Total de Dissertações e Teses de História e Epistemologia da Matemática/Níveis de Ensino

Níveis	Dissertações	Teses	Total
Educação Básica	10	7	17
Ensino Superior	19	11	30
Total	29	18	47

Fonte: Barros (2016, p. 57).

Em seguida, fizemos um quadro, no qual separamos o quantitativo de trabalho em função dos conteúdos, usando como critério as áreas de conhecimentos do Exame Nacional do Ensino Médio-ENEM: 1) Conhecimentos numéricos: operações em conjuntos numéricos (naturais, inteiros, racionais e reais), desigualdades, divisibilidade, fatoração, razões e proporções, porcentagem e juros, relações de dependência entre grandezas, sequências e progressões, princípios de contagem; 2) Conhecimentos

geométricos: características das figuras geométricas planas e espaciais; grandezas, unidades de medida e escalas; comprimentos, áreas e volumes; ângulos; posições de retas; simetrias de figuras planas ou espaciais; congruência e semelhança de triângulos; teorema de Tales; relações métricas nos triângulos; circunferências; trigonometria do ângulo agudo; 3) Conhecimentos de estatística e probabilidade: representação e análise de dados; medidas de tendência central (médias, moda e mediana); desvios e variância; noções de probabilidade; 4) Conhecimentos algébricos: gráficos e funções; funções algébricas do 1º e do 2º grau, polinomiais, racionais, exponenciais e logarítmicas; equações e inequações; relações no ciclo trigonométrico e funções trigonométricas; 5) Conhecimentos algébricos/geométricos: plano cartesiano; retas; circunferências; paralelismo e perpendicularidade, sistemas de equações.

Criamos um novo critério, já que alguns conteúdos do Ensino Médio não estão mais entre os conteúdos da prova do ENEM, e chamamos de "Outros" – conteúdos como números complexos e determinantes são considerados conteúdos do Ensino Médio, mesmo não sendo abordados no ENEM.

No quadro 03 a seguir, é apresentado o quantitativo dos conteúdos do Ensino médio nas dissertações e teses em História e Epistemologia da Matemática produzidas nos programas de pós-graduação do Brasil no período de 1990 a 2010.

Quadro 03 – Dissertações e Teses que Abordam Conteúdos do Ensino Médio

Áreas	Diss.	Teses	Total	%
Conhecimentos Numéricos	4	2	6	35%
Conhecimentos Geométricos	3	3	6	35%
Estatística e probabilidade	-	1	1	6%
Conhecimentos Algébricos	-	1	1	6%
Conhecimentos Algébricos/ geométricos	1	-	1	6%
Outros	2	-	2	12%
Total	10	7	17	100%

Fonte: Barros (2016, p. 121).

Neste artigo, mostraremos quais conteúdos de geometria espacial aparecem nas 17 (dezesete) dissertações e teses, dando ênfase àquelas que apre-

sentam o tema como conteúdo principal focalizado, citadas no quadro 04, e fazendo um breve comentário nos trabalhos que apresentam conteúdos secundários mobilizados encontrados em outras 3 (três) dissertações e teses como mostra o quadro 05.

Quadro 04 – Dissertações que abordam a Geometria Espacial do Ensino Médio como Conteúdo Principal

Trabalhos	Conteúdo Principal Focalizado	Conteúdos Secundários
Diss. 4	Geometria Espacial: Perspectiva Espacial	Geometria Plana: Simetria
Tese 6	Geometria Espacial	Geometria Plana: Áreas de Figuras Planas; Física Mecânica

Fonte: Adaptada de Barros (2016, p. 229).

Quadro 05 – Dissertações e Teses que abordam a Geometria Espacial do Ensino Médio como Conteúdo Secundário

Trabalhos	Conteúdo Principal Focalizado	Conteúdo Secundário Mobilizado
Tese 1	Trigonometria	Geometria Plana: Circunferências e triângulos, Geometria Espacial, Aritmética e Equações Algébricas.
Tese 5	Proporcionalidade	Geometria Plana e Geometria Espacial
Diss. 2	Geometria Plana: Polígonos Regulares	Geometria Espacial: Volumes de Sólidos Geométricos

Fonte: Elaboração com base em Barros (2016).

2 Sobre as dissertações e teses

Neste tópico iremos analisar uma dissertação e uma tese que abordam conteúdos de Geometria Espacial como tema principal focalizado e fazer um breve comentário de duas teses e uma dissertação que mobilizam o tema como conteúdo secundário.

A Tese 1, *Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro Episódios da História da Heurística*, escrita por Baleiro Filho (2004), teve o objetivo de analisar e discutir os indícios heurísticos presentes nas obras *O*

Método (de Arquimedes), *A Coleção Matemática* (de Pappus) e *Regras para a Direção do Espírito* (de Descartes), buscando estabelecer relações com a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras *A arte de Resolver Problemas* e *Matemática e Raciocínio Plausível* (de George Polya), abordando-se o conteúdo de geometria espacial, trabalhado no Ensino Médio.

A pesquisa usou o método bibliográfico, consultando a obra original de Arquimedes e traduções das demais obras. A primeira obra *O Método*, de Arquimedes, é a mais antiga, tendo sido feita uma tradução do original em grego clássico para o português. Quanto à obra *A Coleção Matemática*, de Pappus, foi utilizada a tradução do Professor Ireneu Bicudo, também do grego clássico para o português, fazendo-se uso de um trecho do livro VII, que fornecia ideias sobre a heurística. No que diz respeito à obra *Regras para a Direção do Espírito*, de Descartes, foi feita uma tradução do francês para o português. Essa obra em francês já era uma tradução do original em latim, feita por J. Sirven.

A tese foi dividida em seis capítulos. O primeiro deles discute o significado da Heurística, o segundo capítulo aborda a metodologia da pesquisa em História da Matemática utilizada no trabalho. O terceiro capítulo discute as origens da atividade heurística encontradas em *O Método*, de Arquimedes. O quarto capítulo trata da investigação do livro VII, de *A Coleção Matemática*, de Pappus, abordando os vestígios da heurística.

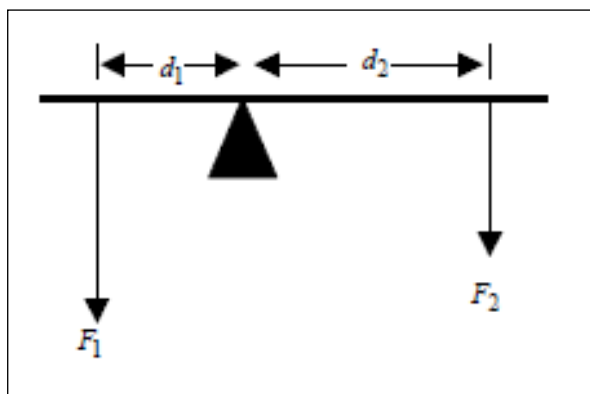
No quinto capítulo, é feita a análise da obra *Regras para a Direção do Espírito*. Em seguida, no sexto capítulo, foi feita uma comparação entre a sistematização da atividade heurística apresentada nas obras *A arte de Resolver Problemas* e *Matemática e Raciocínio Plausível*, de Polya, e os aspectos heurísticos evidenciados nas obras de Arquimedes, Pappus e Descartes.

A parte matemática propícia para o Ensino Médio, discutida pelo autor em sua tese, foi a proposição 2, do Método de Arquimedes, que aparece no terceiro capítulo da tese em análise:

Que toda esfera é o quádruplo do cone tendo a base igual ao grande círculo da esfera, e altura igual a partir do centro para fora da esfera, e o cilindro tendo a base igual ao grande círculo da esfera e altura igual ao diâmetro da esfera, é o que contém outro tanto e mais metade da esfera (ARQUIMEDES, ANEXO, p. 174, trad. A, apud BALIEIRO FILHO, 2004, p. 56).

De acordo com Balieiro Filho (2004), o cálculo do volume da esfera é calculado por meio do conceito físico do princípio da estática. Arquimedes usa uma haste rígida equilibrada sobre um cutelo, chamado ponto de apoio, sob a ação de duas forças, F_1 e F_2 . Se as forças F_1 e F_2 estão distantes d_1 e d_2 , respectivamente, do ponto de apoio, então $F_1 \times d_1 = F_2 \times d_2$. Vejamos na figura 1:

Figura 1 – haste rígida equilibrado sobre um cutelo

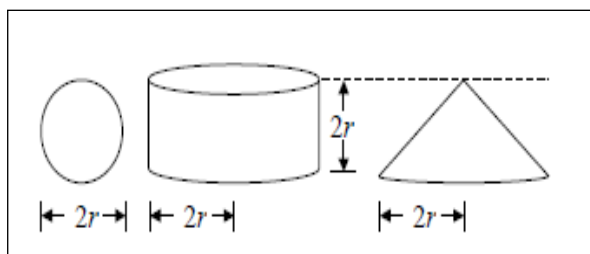


Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 56).

O professor de Matemática precisará de um pouco de conhecimento de Física, mais precisamente da área de Mecânica, se quiser utilizar um exemplo desse tipo em sala de aula com os seus alunos do Ensino Médio. Provavelmente, os alunos já possuem esse conhecimento, pois Física Mecânica é apresentada no 1º ano do Ensino Médio e Geometria Espacial no 2º ano, o que faz essa aplicação possuir potencial didático para esse nível de ensino.

Voltando para o problema, o que se abordou neste momento da tese foi a forma como Arquimedes encontrou o volume de uma esfera, comparando sua massa com a de um cone e com a de um cilindro, considerando, inicialmente, os sólidos mostrados na Figura 2: uma esfera de raio r , um cilindro circular reto com uma base de raio $2r$ e altura $2r$ e um cone circular reto com uma base de raio $2r$ e altura $2r$.

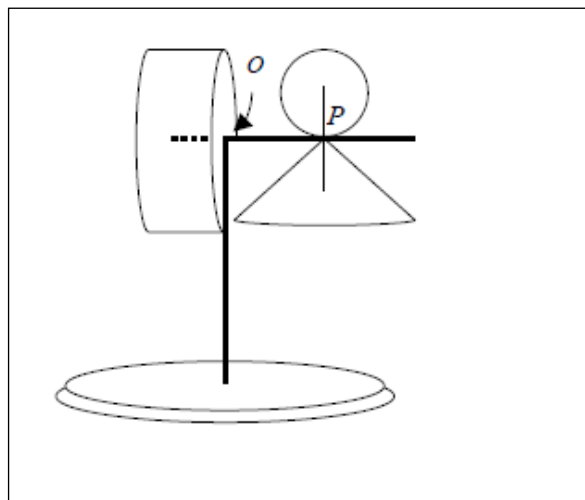
Figura 2 – Esfera, Cilindro e Cone



Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 57).

Segundo Balieiro Filho (2004), Arquimedes mostrou que a esfera e o cone equilibravam o cilindro sobre o braço de uma alavanca, sendo o o ponto de apoio, como mostra a Figura 3.

Figura 3 – Equilíbrio dos sólidos em a alavanca 1

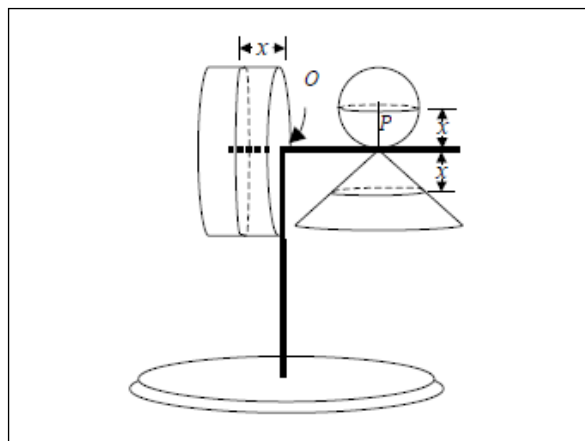


Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58).

Em seguida, ainda de acordo com Balieiro Filho:

Arquimedes demonstrou que o momento de uma fina partição do cilindro a uma distância x do ponto de apoio o equilibraria a soma dos momentos de cada uma das finas partições da esfera e do cone a uma distância x do ponto P . Usando esse fato, ele mostrou que o cilindro equilibraria a esfera e o cone. (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58)

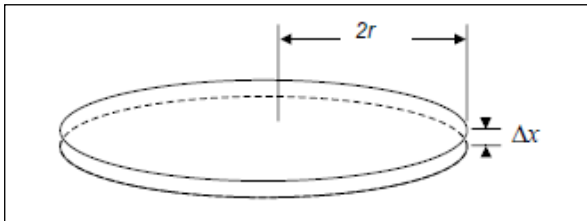
Figura 4 – Equilíbrio dos sólidos em uma alavanca 2



Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58).

De acordo com Balieiro Filho (2004), os argumentos usados por Arquimedes em sua demonstração são interpretados da seguinte maneira: a espessura de cada fina partição sendo Δx com Δx é muito pequena. Assim, a fina partição do cilindro é um círculo de raio $2r$ e a espessura dessa partição é Δx . Então, o volume desta fina partição do cilindro será $V_c = \pi \cdot (2r)^2 \cdot \Delta x = 4\pi r^2 \Delta x$, como mostra a Figura 5:

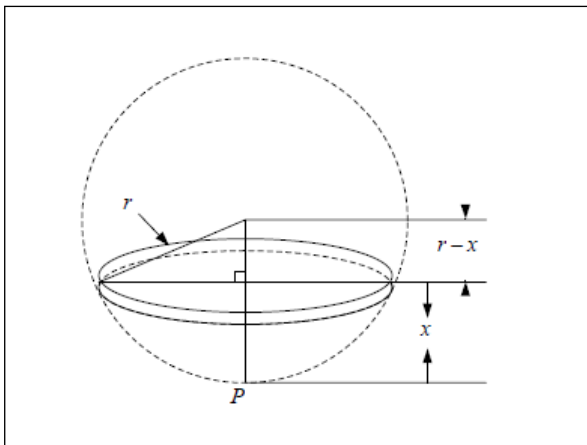
Figura 5 – Corte da Esfera



Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58).

Considerando a esfera, sua fina partição tem raio igual a $\sqrt{r^2 - (r-x)^2} = \sqrt{2rx - r^2}$. Então, o volume desta fina partição da esfera será $V_e = \pi \cdot (2rx - r^2) \cdot \Delta x = 2\pi r x \Delta x - \pi r^2 \Delta x$, como mostra a Figura 6:

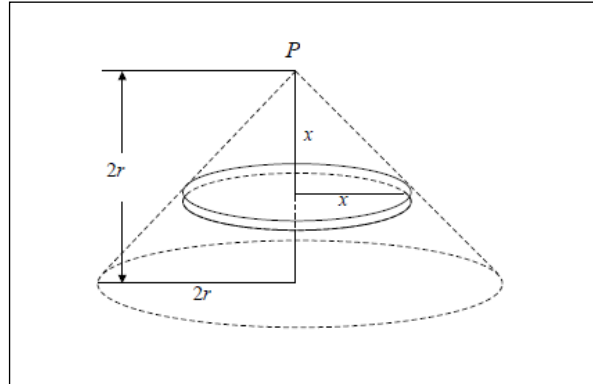
Figura 6 – Esfera



Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 58).

Por fim, a altura do cone é igual ao raio da base e o raio da partição é igual a x , então, o volume desta partição do cone será $V_k = \pi x^2 \Delta x$, como mostra a Figura 7:

Figura 7 – Cone



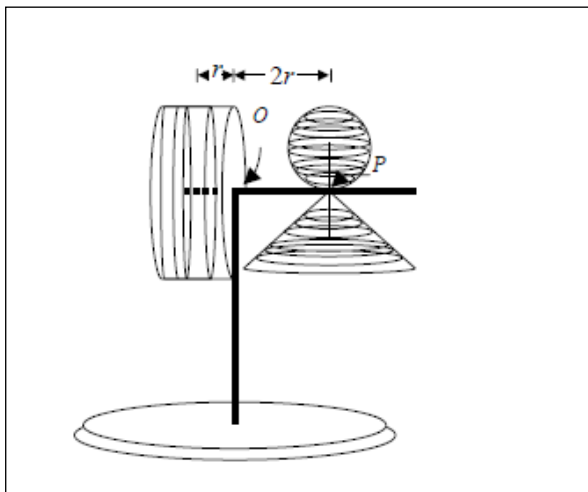
Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 59).

De acordo com Balieiro Filho:

Arquimedes supõe que os três sólidos são feitos do mesmo material homogêneo e que a massa de cada um, por unidade de volume, seja igual a 1. A força da gravidade sobre as massas de cada fina partição circular pode ser considerada como atuando nos centros dessas finas partições circulares. Para a fina partição do cilindro o centro de gravidade está a x unidades do ponto de apoio o . Os centros de gravidade das finas partições da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical que passa pelo ponto P , o qual está situado a $2r$ unidades do ponto de apoio o . Portanto, o momento da fina partição do cilindro próximo do ponto de apoio o é igual a $V_k = 4\pi r^2 \Delta x(x)$. A soma dos momentos das finas partições da esfera e do cone próximas do ponto de apoio o é igual $[\pi(2\pi r x \Delta x + \pi r^2 \Delta x)]2r = (2\pi r x \Delta x)2r = 4\pi r^2 \Delta x(x)$. (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 60)

Ao considerar que os momentos são iguais e opostos, a fina partição do cilindro equilibra as finas partições da esfera e do cone combinadas, fazendo com que Arquimedes considerasse o cilindro como a soma de um grande número de finas partições, como mostra a figura 7.

Figura 7 – Equilíbrio dos sólidos em uma alavanca 3



Fonte: (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 59).

Segundo Balieiro Filho (2004), a soma dessas finas partições produzirá o cilindro, a esfera e o cone. Então, fazendo a comparação, Arquimedes conclui que o momento do cilindro próximo do ponto de apoio o era igual à soma dos momentos da esfera e do cone próximas do ponto de apoio o .

A força da gravidade sobre um sólido simétrico pode ser considerada como a que atua em seu centro geométrico. O centro do cilindro está a r unidades do ponto de apoio o . Os centros da esfera e do cone estão sobre uma linha vertical a uma distância $2r$ do ponto de apoio o . Arquimedes usa, provisoriamente, que o volume de um cone é um terço do volume de um cilindro de mesma base e mesma altura. (BALIEIRO FILHO, 2004, p. 62)

Para finalizar, ao denominar o volume da esfera de V_e e o volume do cone de V_c , tem-se que o volume do cilindro é $3V_c$.

Assim, as massas da esfera, cone e cilindro são V_e , V_c e $3V_c$, respectivamente. Tomando momentos próximos do ponto de apoio o , tem-se:

$$3V_c r = (V_e 2r + V_c 2r) = (V_e + V_c) 2r, \text{ então,}$$

$$V_e = \frac{V_c}{2}.$$

O volume do cilindro é $3V_c = \pi(2r)^2 2r = 8\pi r^3$.
Portanto $V_c = \frac{8}{3} \pi r^3$.

Chega-se, então, ao resultado $V_e = \frac{V_c}{2} = \frac{4}{3} \pi r^3$.

Geralmente, a esfera é o último sólido geométrico estudado no Ensino Médio, estudando-se, primeiramente, os Prismas, depois a Pirâmide, Cilindro e o Cone. Esse conteúdo é trabalhado no fim do segundo ano do Ensino Médio, quando os alunos também já possuem uma boa noção de física, principalmente a parte de Mecânica, esta geralmente toda vista no primeiro ano. Consideramos que a demonstração do volume da Esfera tem potenciais didáticos para serem aplicados no Ensino Médio, sendo uma atividade interdisciplinar, pois é possível trabalhar com conceitos de física e, ao mesmo tempo, revisando os outros sólidos geométricos.

Além dos conceitos de Física e Geometria Espacial, também mobilizamos conceitos de Geometria plana, que é o caso das áreas de figuras planas, muito natural para quem está trabalhando com Geometria Espacial. Então, em única demonstração, mostramos que a tese de Balieiro Filho (2004) pode ser utilizada por professores do Ensino Médio.

A dissertação 1, *Perspectiva no Olhar – Ciência e Arte do Renascimento*, escrita por Costa (2004), teve como objeto de pesquisa os trabalhos dos pintores e arquitetos do Renascimento italiano. O objetivo foi realizar, a partir das experiências e técnicas desenvolvidas por artistas do Renascimento, atividades de caráter interdisciplinar e transdisciplinar no Ensino Médio e, especificamente, desenvolver inteligências compatíveis com a capacidade cognitiva, não apenas quanto à aquisição de conceitos geométricos mas também quanto à compreensão e representação espacial conquistada pelo olhar. Foi utilizada a metodologia da Engenharia Didática, um processo que se interessa pela concepção, realização, observação e análise de sequências de ensino.

Essa sequência foi elaborada por meio de uma atividade realizada com 15 alunos da 2ª série do Ensino Médio, com inspiração em trabalhos dos pintores e arquitetos daquela época, a fim de preparar o olhar para a compreensão das técnicas da perspectiva e da geometria projetiva e espacial. Seu problema de pesquisa foi: que meios (técnicas, instrumentos, situações e sequências) favorecem a apropriação do espaço pelo olhar e levam a perceber as relações entre

o que é visto, o que é sábio e o que conhecido? Este trabalho apresenta conteúdos de Geometria Espacial para o Ensino Médio.

Neste trabalho, fica bem claro que há potenciais didáticos para o Ensino Médio, pois o autor já traz em sua dissertação uma sequência didática dividida em cinco blocos. No 1º bloco, chamado de histórico-expositivo, exibem-se, em sala de aula, com auxílio de retroprojetor ou Datashow, imagens de épocas (desde as civilizações, romanas e idade média) e mapas históricos, principalmente do Renascimento, com o objetivo de trabalhar a imagem visual com os alunos.

No 2º bloco, chamado exploratório-vivencial, os alunos fazem um já conhecido percurso de trem, com o objetivo de explorar os potenciais de perspectivas de espaço, educando o olhar tridimensional. No 3º bloco, chamado de ótico-científico, eles irão desenhar, realizando quatro atividades até chegarem ao 4º bloco, chamado técnico-representativo, em que eles usarão técnicas de perspectiva. Por fim, no 5º bloco, chamado plástico-espacial, eles constroem maquetes. Temos uma sequência de ensino bastante rica, a fim de desenvolver no aluno uma perspectiva espacial adequada para que haja um bom desempenho em Geometria. Segundo Rêgo, Rego e Vieira (2012), algumas das ações ligadas ao raciocínio espacial compreendem: gerar imagens; analisar imagens para responder às questões sobre elas; transformar imagens e operar sobre elas; e utilizar imagens em processos envolvendo outras operações mentais, ratificando nosso pensamento da importância de se trabalhar a visão espacial do aluno.

O trabalho foi executado com 15 alunos e com durabilidade de 60 horas – 15 encontros de 4 horas cada um. Consideramos uma excelente atividade que pode ser elaborada com os alunos como um trabalho de extensão, pois fica claro que essa atividade visa a melhorar a percepção espacial dos alunos, facilitando o aprendizado tanto de Geometria Plana, como de Geometria Espacial e Geometria Analítica. Sabemos que alunos com uma boa base de conceitos básicos de Matemática e uma apurada percepção espacial tende a ter mais facilidade em aprender conceitos de Geometria.

A dissertação 2, *O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874*, escrita por Mormello (2010), apresenta o conceito de Geometria Espacial de forma secundária, tendo como objeto de pesquisa o currículo de Matemática da

Academia Real Militar do Rio de Janeiro entre 1811 e 1874.

A proposta dessa dissertação foi analisar como se concebeu o currículo de Matemática da Academia Real Militar do Rio de Janeiro e suas modificações posteriores, estabelecidas pelas reformas dos seus estatutos, desde 1811, quando tem início o primeiro ano de funcionamento da Academia (1874) e o ensino de engenharia passa a ser responsabilidade de um ministério civil, com a transformação da Escola Central em Escola Politécnica. Especificamente, os objetivos desse trabalho foram, em primeiro lugar, entender qual foi o papel das “matemáticas” nas escolas militares de Portugal e do Brasil (no século XVIII) e na academia Real Militar. Em seguida, entender as origens do currículo científico e, em última análise, a orientação dada por D. Rodrigo de Sousa Coutinho à Academia Real Militar. Por último, como foi situado o Ensino das matemáticas, à medida que as modificações impostas pelas reformas curriculares iam sendo aplicadas à academia bem como levantar as dificuldades encontradas pela escola no sentido de cumprir os estatutos.

A metodologia utilizada para alcançar esses objetivos foi uma sequência de estudos documentais.

Na pesquisa documental, foram utilizadas fontes primárias – os estatutos das escolas civis e militares portuguesas e das escolas militares do Brasil (com exceção da Academia Real de Artilharia, Fortificação e Desenho, encontrados na obra de Pirassinunga), os livros de Alpoim e Bêlidor e Serrão Pimentel – e as fontes secundárias: os livros de Telles, Carvalho, Freire, Tavares, Mota, Pardal, Pirassinunga e o livro de Johvah Motta, “Formação de Oficial do Exército” (este por ser uma referência para quantos queiram estudar a História da Academia Real Militar e seus desdobramentos ao longo de quase dois séculos).

Nessa dissertação, aparece, como conteúdo principal focalizado, a Geometria Plana nas obras utilizadas no Ensino Militar no século XVIII, apresentando-se, resumidamente, quatro obras: O Método Lusitano de Desenhar as Fortificações, Exame de Artilheiros, Exame de Bombeiros e O Novo Curso de Matemática, cujos conteúdos podem ser abordados no Ensino Médio.

Na sua dissertação, Mormello também aborda um pouco de geometria espacial, trazendo o que Serrão Pimentel denomina de “Dimensão da Solidade” ou “Corpórea Quantidade”, conteúdo que se refere ao volume de alguns sólidos como cubo, paralelepí-

pedos, outros prismas, cilindros, cones, pirâmides e tronco de pirâmide ou de cone.

Mormello (2010) conclui que, com a utilização do livro de Serrão Pimentel, pode-se afirmar que a matemática por este usada tem por finalidade tratar das aplicações de interesse dos engenheiros, ou seja, subsidiam o ensino dos assuntos relacionados à arquitetura militar. Isto me faz lembrar a importância desse trabalho para tratar de matemática nas turmas do Curso Técnico em Edificações Integrado ao Ensino Médio dos Institutos Federais de Educação, Ciência e Tecnologia de todo o país, pois, com essa afirmação, sugiro que este conteúdo do livro de Serrão Pimentel seja uma aplicação interessante com esses alunos. Segundo Mendes (2009), é importante a discussão dos modos de uso da história como um recurso que favoreça a construção das noções matemáticas pelos alunos durante suas atividades na Escola. E, neste caso, pode ser uma aplicação interessante para os alunos desse curso técnico.

Ao ter trabalhado com turmas de Edificações tanto no IFPE, no Campus Pesqueira, como no IFPB Campus João Pessoa, em que os alunos cobram aplicações para sua realidade, consideramos que arquitetura militar seja uma boa e curiosa base de aplicação da geometria para essas turmas, pois se trata de práticas de desenhos das Fortificações, que podem ser repassadas para os professores de Desenho, configurando-se, inclusive, uma prática interdisciplinar bastante produtiva.

A Tese 2, *Dinâmica do Pensamento Geométrico: Aprendendo a Enxergar Meias Verdades e a Construir Novos Significados*, escrita por Gomes (1997), tem como objeto de estudo a obra *“De Triangulis Omnimodis Libri Quinque”*, de Johann Müller Regiomontanus (1436-1476): *Uma Contribuição para o Desenvolvimento da Trigonometria e foco temático a História da Trigonometria*. A pesquisa foi bibliográfica, tendo sido utilizada, para tradução em Português, uma versão em inglês de Barnabas Hughes de 1967, na qual se encontra o trabalho original em latim, porém algumas dúvidas foram esclarecidas a partir da obra original, como algumas demonstrações e algumas figuras.

Dessa tese constam quatro objetivos específicos: 1) Apresentar a versão geral da história da trigonometria; 2) Situar Regiomontanus no contexto do desenvolvimento da trigonometria; 3) Colocar à disposição da comunidade de Educadores e Historiadores brasileiros o texto *De Triangulis Omnimodes Libri Quinque*, traduzido para o português em forma de cinco livros

de todos os tipos de triângulos; 4) Destacar as contribuições de Regiomantus e de sua obra *De Triangulis* para o desenvolvimento da trigonometria.

A tese foi dividida em três capítulos. No terceiro capítulo, é feita a descrição da obra logo acima citada, seguida dos comentários. Essa obra é dividida em cinco livros, com os dois primeiros voltados para Trigonometria plana, enquanto os três últimos abordam Trigonometria esférica. No terceiro livro, é apresentada a fundamentação da Trigonometria Esférica com a Geometria Espacial, apresentando, do primeiro ao trigésimo quarto teorema, a geometria de grandes círculos em esferas e, do trigésimo quinto até o cinquagésimo sexto teorema, um estudo de triângulos esféricos. O quarto livro também é uma continuação da Trigonometria Esférica, dando ênfase a resoluções que precisavam de técnicas de aritmética simples; o quinto livro é uma continuação de problemas envolvendo triângulos esféricos.

Esses cinco livros de Regiomontanus apresentam um forte potencial didático a ser explorado no Ensino Médio, com diversos Teoremas na área de Trigonometria, tanto no triângulo retângulo como na circunferência, mobilizando outros conceitos, como Geometria Plana, Geometria Espacial e alguns tópicos de Aritmética e Álgebra. Segundo Pereira,

Apesar de a obra estudada ser direcionada à área de Geometria e Trigonometria, há momentos que, em algumas demonstrações dos Teoremas, Regiomontanus se utiliza da Aritmética e da Álgebra. Alguns teoremas e o manuseio da Álgebra se adequam para o autor à medida que existem teoremas que não podem ser provados, no momento, por meios geométricos. Regiomontanus aplica assim exemplos, utilizando Álgebra para ilustrar a aplicação. É importante ressaltar que não há evidências sobre uma obra escrita por Regiomontanus que envolva essa parte da Matemática. (PEREIRA, 2010, p. 83)

Nos anexos da tese, Pereira traz a tradução em português dos cinco livros de Regiomontanus, com a demonstração de todos os teoremas, um material com mais de 200 laudas, excelente para ser aproveitado para formulação de material a ser usado em sala de aula. Algumas demonstrações precisam de uma mobilização de diversos conceitos matemáticos, sendo considerados de nível alto para trabalhar nas turmas em geral, mas podem ser materiais bem usados

voltados à formulação de desafios para serem usados em turmas de preparatório para Olimpíadas de Matemáticas, ou seja, temos um material que pode ser usado de diversas formas positivas, desde que as informações sejam bem tratadas pelos professores, antes de serem repassadas para os alunos.

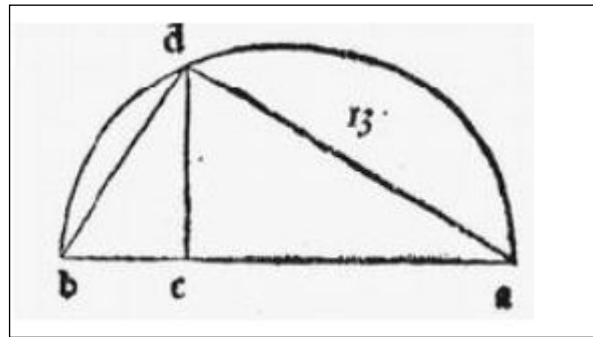
A tese 3, *De Divina Proportione* de Luca Pacioli, escrita por Bertrato (2008), teve como objetivo traduzir e comentar a obra de Luca Pacioli, a partir do manuscrito que se encontra na biblioteca Ambrosiana de Milão. A pesquisa teve como método o bibliográfico e seu objeto de estudo: a obra de Luca Pacioli: *De Divina Proportione*, abordando muitos conteúdos de Geometria Plana e Espacial. Segundo Bertato, autor da tese:

Luca Pacioli (1445-1517), famoso matemático renascentista, escreveu *Summa di Arithmetica Geometria Proportione e Proportionalita* (1494), o que podemos considerar a obra que sintetiza todo o conhecimento matemático europeu acumulado até 1500. Não obstante, sua outra obra, *De Divina Proportione* (1509), é a que contém, dentre as teorias das proporções, aqueles temas que mais lhe interessavam e que ele considerava *“secretíssima scientia”*: a *“Divina Proporção”*, isto é a *“razão áurea”*. (BERTATO, 2008, p. v)

Essa tese foi dividida em duas partes. Na Parte I, encontram-se algumas considerações sobre Luca Pacioli e sua obra, uma breve história do Quadrivium e a sua participação no que foi denominado *“Querela da Perspectiva”*. A Parte II consiste na tradução da *De Divina Proportione* e dos Comentários e Notas. Nesta tese, são trabalhados os conceitos de proporcionalidade em conteúdos de Geometria Plana e Espacial.

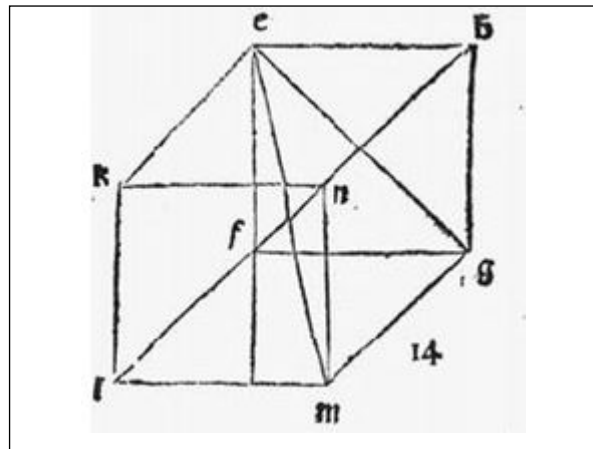
O primeiro tópico de Geometria Espacial abordado foi sobre a relação entre elementos da Esfera e dos polígonos regulares, mais precisamente, a proporção entre o lado do polígono e o diâmetro da esfera. Inicialmente, ele mostra essa relação com o cubo. Vejamos a Figura 8:

Figura 8 – Semi-circunferência de diâmetro ab



Fonte: Bertrato (2008, p. 33)

Figura 9 – Cubo cujo lado foi formado pelo segmento db da figura 17



De acordo com Pacioli, o cubo deve se formar tomando-se o diâmetro da esfera, que é o segmento ab da figura 8. Logo em seguida, deve-se dividir o diâmetro no ponto c, traçando a linha cd perpendicular à linha ab, traçando também as linhas db e da, tudo isso de forma que a linha ac seja o dobro de bc.

Depois, deve ser feito um quadrado com a linha bd, formando-se, desse quadrado, um cubo. E este tal estará circunscrito exatamente pela esfera do proposto diâmetro, donde o quadrado desse diâmetro será sempre três vezes o quadrado do lado do cubo. Dessa maneira, se o diâmetro fosse $\sqrt{300}$, o lado seria exatamente 10. Segundo Pacioli, este conhecimento, em muitos casos, é necessário e oportuno.

Além do cubo, uma construção similar foi feita no livro de Pacioli, traduzido na tese de Bertato (2008), com o dodecaedro, octaedro e icosaedro. Outro problema apresentado foi: como saber encontrar os lados dos cinco poliedros regulares, todos circunscritos exatamente por uma mesma esfera, da qual só conhecemos apenas o diâmetro?

O livro não traz as demonstrações, apenas cita onde elas estão, mas, mesmo que as trouxesse, consideramos a maioria dos exemplos com um nível um pouco elevado para ser abordado na sala de aula do Ensino Médio, podendo, entretanto, ser trabalhado em aulas de aprofundamento com alunos interessados em Olimpíadas de Matemática.

Sobre os poliedros, cita-se a formação de várias situações entre elas: dodecaedro no icosaedro, tetraedro no cubo, tetraedro no octaedro, octaedro no cubo, entre outras. Também aborda como se forma a esfera em cada um dos polígonos regulares, os poliedros oblíquos, pirâmides, colunas cilíndricas, ou seja, é uma tese que apresenta diversos conceitos de geometria espacial, alguns de fácil entendimento para alunos do Ensino Médio, e a grande maioria um pouco complexa, com perfil para ser trabalhado no Ensino Superior.

Já se pode afirmar a presença de conteúdos desse material na área da geometria espacial, comprovando seu potencial didático para o Ensino Médio.

Esse material trata de uma fonte literária primária (texto histórico) que pode ser explorada pedagogicamente na forma de problemas históricos adaptados de trechos originais, conforme Mendes (2009, p. 105).

3 Considerações finais

Ao longo da nossa pesquisa, analisamos as dissertações e teses produzidas e defendidas nos programas de pós-graduação *stricto sensu* do Brasil, no período de 1990 a 2010, no campo da História da Matemática, especificamente os trabalhos que versavam sobre história e epistemologia da Matemática, tendo centrado nossa pesquisa na seleção e na análise dos trabalhos que produziram informações históricas sobre tópicos matemáticos relacionados à Geometria Espacial do Ensino Médio. Nossa intenção foi localizar produções que tivessem potenciais conceituais e didáticos que pudessem contribuir para estabelecermos uma abordagem mais esclarecedora dos conteúdos do Ensino Médio, de modo que os alunos possam compreender melhor o processo de construção da matemática em cada contexto e momento histórico específico.

Nos quadros mostrados neste artigo, apresentamos todos os conteúdos identificados nas referidas dissertações e teses que possuem potenciais didáticos para o Ensino Médio. Quando levamos em consideração as grandes áreas do ENEM, encontramos 35% de trabalhos na área de conhecimentos numéricos, 35%

na área de conhecimentos geométricos, 6% na área de conhecimento algébricos, 6% de conhecimentos algébricos/geométricos, 6% de conhecimentos de probabilidade e estatística, e, na categoria que chamamos de *outros*, que traz um trabalho focado nos números complexos e outro em lógica, encontramos 12% dos trabalhos.

Neste artigo o nosso foco foi o conteúdo de Geometria Espacial que constou de 29% dos trabalhos, sendo que, em 12% desses trabalhos, esse assunto apareceu com conteúdo principal focalizado, com um deles sobre simetria com a finalidade de melhorar a percepção espacial dos alunos, enquanto outro abordando os principais conceitos do Ensino Médio como Cone, Cilindro e Esfera, interligado a conceitos de Física.

Observamos, com essas dissertações e teses, abordagens diferentes para se trabalhar conceitos de geometria espacial na sala de aula, o que pode favorecer o aprendizado dos alunos do Ensino Médio, até porque, segundo Viana e Souza (2013), o conteúdo de geometria é muito importante para a formação dos alunos e vem sempre aparecendo com muita frequência no ENEM.

Na exploração das dissertações e teses, mostramos alguns conteúdos do Ensino Médio relacionados à Geometria Espacial que podem ser abordados pelo professor de Matemática, porém, antes da aplicação na sala de aula, é preciso que o professor faça um tratamento dessas informações para que o conteúdo possa ser ensinado da melhor maneira possível, de acordo com o potencial cognitivo de sua turma e também com a realidade de cada ambiente escolar.

Deixamos claro que o objetivo deste trabalho não foi de desenvolver atividades para sala de aula, e sim mostrar quais trabalhos possuem potenciais didáticos. Também oferecemos algumas sugestões, ficando por parte do docente que tiver interesse desse material se apropriar, já sabendo do que ele trata e o que pode ser realizado ou executado em sala de aula.

Uma importante contribuição de nosso trabalho é apresentar aos docentes ou futuros docentes que, por meio da leitura dos materiais produzidos de História da Matemática no Brasil nos cursos de pós-graduação *stricto sensu*, é possível desenvolver e produzir materiais que podem ser utilizados em sala de aula com alunos do Ensino Médio.

REFERÊNCIAS

BALIEIRO FILHO, Inocêncio Fernandes. **Arquimedes, Pappus, Descartes e Polya – Quatro Episódios da História da Heurística**. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – UNESP, Rio Claro, 2004.

BARROS, Rafael José Alves do Rego Barros. **Pesquisas sobre História e Epistemologia da Matemática: Contribuições para Abordagem da Matemática no Ensino Médio**. Tese (Doutorado em Educação) – UFRN, Natal, 2016.

BERTATO, Fabio Maia. **“De Divina Proportione” de Luca Pacioli (Tradução Anotada e Comentada)**. Tese (Doutorado em Filosofia) – UNICAMP, Campinas, 2008.

COSTA, Cristiano Ohton de Amorim. **Perspectiva no Olhar – Ciência e Arte do Renascimento**. Dissertação (Mestrado em Ensino da Matemática) – PUC, São Paulo, 2004.

MENDES, Iran Abreu. **História da Matemática no Ensino: Entre trajetórias profissionais, epistemologias e pesquisas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2015.

MENDES, Iran Abreu. **Cartografias da produção em História da Matemática no Brasil: um estudo centrado nas dissertações e teses defendidas entre 1990-2010**. Relatório de Pesquisa (Bolsa produtividade CNPq). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

MENDES, Iran Abreu (a). Tendências da Pesquisa em História da Matemática no Brasil: A Propósito das Dissertações e Teses (1990 – 2010). **Educação Matemática e Pesquisa**, São Paulo, v. 14, n. 3, p. 465 - 480, 2012.

MENDES, Iran Abreu. **Investigação Histórica no Ensino da Matemática**. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2009.

MENDES, Iran Abreu. Uma radiografia dos textos publicados nos Anais dos SNHM. In: 11º SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA CIÊNCIA E TECNOLOGIA, 2008, Niterói. **Anais**. Niterói: SBHC, 2008. p. 1-11.

MORMÊLLO, Ben Hur. **O Ensino de Matemática na Academia Real Militar do Rio de Janeiro, de 1811 a 1874**. Dissertação (Mestrado em Matemática) – UNICAMP, Campinas, 2010.

PEREIRA, Ana Carolina Costa. **A Obra “De Triangulis Omnimodis Libri Quinque” de Johann Müller**

Regiomantanus (1436 – 1476): Uma Contribuição para o Desenvolvimento da Trigonometria. Tese (Doutorado em Educação) UFRN, Natal, 2010.

REGO, Rogéria Gaudêncio. REGO, Rômulo Marinho. VIEIRA, Kleber Mendes. **Laboratório de Ensino da Geometria**. Campinas: Editora Autores Associados, 2012.

SAD, Ligia Arantes (Ed.). In: VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2005, Rio Claro. **Anais...** Rio Claro: SBHMat, 2005.

VIANA, Fernando César de Abreu. SOUZA, Herbert José Cavalcanti de. **Matemática e suas Tecnologias**. João Pessoa: Editora Imprell, 2013.