

Desenvolvimento de um modelo reduzido didático qualitativo e quantitativo de viga hiperestática

Gilberto Carbonari ^[1], André Campos de Moura ^[2], Carlos Eduardo Amaral Nicacio ^[3], Danilo Takeshi Sagae ^[4], Leonardo Takeo Ogassawara ^[5], Naoto Fujii ^[6], Rafael Reina de Souza ^[7]

[1] carbonar@uel.br. [2] andre.moura@uel.br. [3] carlosnicacio94@gmail.com. [4] danilosagae@gmail.com. [5] leotakeo17@gmail.com. [6] naoto.fj@gmail.com. [7] rafael.reina@live.com. Departamento de Estruturas, Centro de Tecnologia e Urbanismo, Universidade Estadual de Londrina, PR.

RESUMO

O uso de modelos reduzidos didáticos qualitativos e quantitativos pode auxiliar no ensino de cursos de Engenharia. Tendo isso em vista, se desenvolveu um modelo de viga hiperestática de um vão, engastada-apoiada, que permite comparar os deslocamentos e a reação do apoio rotulado, obtidos teoricamente em sala de aula com os valores medidos no modelo, o que é de grande ajuda no ensino das disciplinas de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas. Na extremidade rotulada, consta uma mini-balança que permite registrar a reação de apoio para cada situação de carregamento. As agulhas fixadas ao longo da viga permitem medir os deslocamentos verticais em várias posições da viga, por meio de um papel milimetrado fixado próximo a viga. Obteve-se uma boa relação entre os deslocamentos e as reações calculados com os medidos no modelo, demonstrando sua eficiência para ilustrar os métodos e conceitos no ensino da engenharia.

Palavras-chave: Modelo reduzido. Qualitativo e quantitativo. Viga hiperestática. Ensino de engenharia.

ABSTRACT

The use of qualitative and quantitative educational reduced-scale models can assist with the teaching of engineering courses. With such in mind, a cantilever hyperstatic, simple supported beam model over one span was developed, which enabled comparisons of the displacements and support reactions theoretically obtained in the classroom with those measured in the model, which can be of great help in teaching Mechanics of Materials and Structural Analysis courses. The supporting end contains a mini scale that allows to record the support reaction for each load case situation. Reference needles were attached along the beam in several points, making it possible to measure vertical displacements of the beam in various positions, by means of a graph paper attached behind the beam. As a result, a good relationship between the displacements and reactions forces calculated with the ones measured in the model was obtained, demonstrating its efficiency to illustrate methods and concepts taught in engineering.

Keywords: *Reduced scale model. Qualitative and quantitative. Hyperstatic beam. Teaching of Engineering.*

1 Introdução

O ensino de disciplinas como Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas, em cursos de Engenharia Civil, requer do aluno uma grande capacidade de abstração para o entendimento do comportamento dos diferentes tipos de estruturas e dos materiais, frente as mais diversas solicitações, além de como conceitos e simplificações são aplicáveis para a análise estrutural (PRAVIA; ORLANDO, 2001).

O uso de modelos reduzidos pode ajudar no processo de aprendizado. Dentre esses modelos há modelos qualitativos, com alguns desses vendidos comercialmente. Esses modelos ajudam o aluno a entender, de forma mais prática, como a estrutura é formada, como trabalha cada elemento que a compõe, como funcionam os vínculos externos e internos, porém não permitindo a comparação de resultados obtidos em cálculos em sala de aula (como reações, esforços internos solicitantes e deslocamentos), com o observado no modelo.

A possibilidade de comparação de resultados calculados, utilizando as teorias da resistência dos materiais e das estruturas, auxilia no aprendizado, uma vez que permite apresentar as bases teóricas dos problemas aos alunos, aplicá-las na resolução de exercícios, e comprová-las com a comparação do calculado ao medido no modelo. Isso permite que os alunos, não apenas memorizem conteúdos e processos de cálculo, mas que possam entender e compreender o conteúdo (ANASTASIOU; ALVES, 2012), além de ajudar a introduzi-los ao método científico.

Nessa linha, dentro do curso de Engenharia Civil da Universidade Estadual de Londrina (UEL), foram aprovados dois projetos de pesquisa em ensino para o desenvolvimento de modelos qualitativos e quantitativos, para o ensino de disciplinas da área de estruturas (CARBONARI, 2013; CARBONARI; CAMPOS, 2015). Esses projetos permitem a fabricação de modelos reduzidos qualitativos e quantitativos que são utilizados, principalmente, no ensino de Resistência dos Materiais e de Análise de Estruturas.

Assim, neste artigo é apresentado o desenvolvimento de um modelo reduzido didático, qualitativo e quantitativo, de uma viga hiperestática para auxiliar no ensino da análise de estruturas, tanto para a obtenção do hiperestático (reação de apoio), como os deslocamentos verticais da referida estrutura. Para tal fim, se organizou um grupo de alunos para o proje-

to e desenvolvimento do modelo concebido ao longo do ano de 2015.

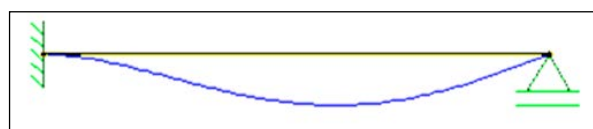
2 Concepção do modelo

O propósito do projeto foi construir um modelo reduzido de viga hiperestática, que permitisse a aplicação de cargas concentradas em diferentes pontos da viga, e a medição da reação de apoio e dos deslocamentos. O modelo deveria ter um tamanho adequado para a utilização em sala de aula, e ser confeccionado com materiais que proporcionassem leveza e durabilidade.

Para a construção do modelo se optou pelo uso de MDF com revestimento de fórmica branca, para confeccionar a estrutura de suporte da viga. Essa madeira tem a característica de ser relativamente leve, com proteção externa que aumenta sua vida útil, desde que acondicionada de forma adequada.

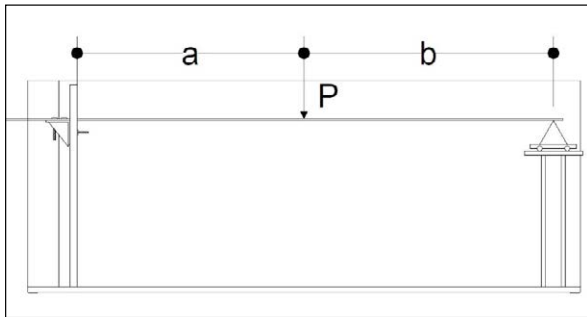
Para a viga, optou-se por utilizar uma régua metálica. Após alguns testes e análises, optou-se por uma régua comercial de aço inoxidável, com 60 cm de comprimento da marca Vonder, permitindo obter deslocamentos que podem ser medidos visualmente, por meio de um papel milimetrado. Na Figura 1 é apresentado o esquema estático da viga e a configuração deformada típica para cargas gravitacionais.

Figura 1 – Esquema estático da viga e configuração deformada típica para cargas gravitacionais.



Na Figura 2 é apresentado um esquema do modelo. A extremidade esquerda da viga será engastada por meio de uma fixação com parafusos a um suporte. Já a extremidade direita será simplesmente apoiada sobre uma peça prismática, de seção triangular, para garantir o comportamento rotulado do apoio. Esse suporte será colocado sobre uma mini-balança para permitir a medição da reação de apoio. As distâncias e indicam a posição do suporte para aplicação de uma carga central na viga (carga).

Figura 2 – Esquema do modelo de viga.



Para a confecção da estrutura de suporte em MDF, composta pela placa de fundo, placa de base, suporte do engaste à esquerda, e suporte do apoio móvel à direita, foram utilizadas uma serra circular e uma serra tipo tico-tico. A serra circular foi usada para cortar as diversas placas e a serra tico-tico para fazer a abertura no suporte do engaste da viga. Posteriormente, foram executados os furos para passagem dos parafusos de fixação da viga.

O engaste da viga foi executado com três chapas de metal coladas e parafusadas no suporte. A viga foi fixada no apoio por meio de três parafusos, tal como apresentado nas Figuras 3 e 4.

Figura 3 – Detalhe do engaste.



Figura 4 – Detalhe dos parafusos de fixação.



O apoio direito foi confeccionado com um prisma triangular entre a viga (régua) e a balança, de forma que a vinculação apresentasse um comportamento mais próximo de um apoio rotulado, de segundo gênero, apoiado sobre uma mini-balança com precisão de 0,1 gf e capacidade máxima de 500 gf. Na Figura 5 é apresentado o resultado final do apoio rotulado, e na Figura 6 é possível ver a balança em operação com a medida da reação no apoio para um teste de carregamento.

Após a execução das ligações, as placas foram coladas e a régua metálica foi parafusada ao suporte do engaste. Logo, foi realizada uma limpeza, seguida da aplicação de uma fórmica branca de acabamento nas partes em que o MDF ficou exposto.

Figura 5 – Vista do contorno apoiado com a balança.



Figura 6 – Medição da reação de apoio com a balança.



A régua foi disposta formando um vão de 50 cm entre o engaste e o apoio rotulado. Foram executados furos na régua nas posições 12,5 cm (ponto A), 25 cm (ponto B) e 37,5 cm (ponto C), a partir do engaste para fixação dos ganchos para a aplicação das cargas concentradas. Nesses mesmos pontos foram fixadas agulhas de referência de forma que ficassem bem próximas ao papel milimetrado, o que permite a medição dos deslocamentos verticais. Na Figura 7 é possível observar os ganchos de aplicação de carga, e na Figura 8 uma das agulhas de medição.

Figura 7 – Ganchos de aplicação da carga.

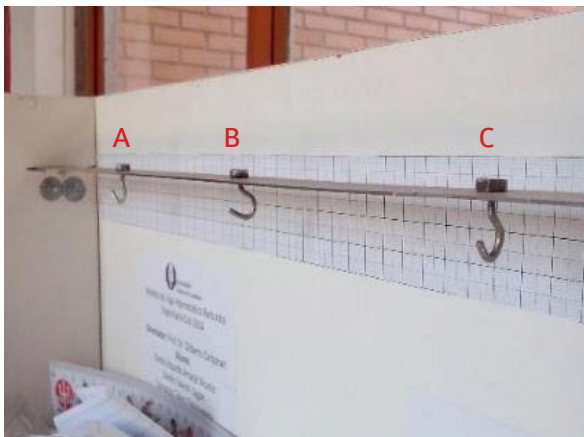


Figura 8 – Agulha de medição do deslocamento.



Na Figura 9 é ilustrado-o modelo finalizado com uma carga concentrada no suporte central (ponto B), onde é possível observar que a deformada da viga se assemelha muito a obtida analiticamente (ilustrada na Figura 1), com uma tangente horizontal próxima ao apoio engastado, e a rotação livre no apoio rotulado.

Figura 9 – Vista do contorno apoiado, com a balança.



3 Aferição e teste do modelo

Primeiramente foi necessário conhecer as propriedades do material do qual a viga (régua) esta composta. Para estimar o valor do módulo de elasticidade foi utilizada a Equação 1, obtida a partir das teorias da Resistência dos Materiais para uma carga aplicada no ponto central (ver Figura 2).

$$(1)$$

onde: E é o módulo de elasticidade da régua (viga); $L = a + b$ é o comprimento e y é o deslocamento vertical; I é o momento de inércia; P é a carga aplicada.

Admitindo que o material da viga apresente um comportamento mecânico elástico e linear, deduziu-se expressões para o deslocamento vertical (y) no ponto B da viga e da reação (R) do apoio rotulado, indicadas nas Equações 2 e 3, respectivamente.

$$(2)$$

$$(3)$$

onde: a é a distância do engaste até o ponto B medida, em um primeiro momento, a partir da face interna do elemento vertical de madeira do modelo (ver Figura 1); b é a distância entre o ponto B e o apoio, P a carga concentrada aplicada no ponto B; E o módulo de elasticidade da viga; e $L = a + b$.

Tomando como base o exposto acima, foram aplicados carregamentos na viga com o objetivo de determinar o módulo de elasticidade do material da viga (régua), a partir das medições dos deslocamentos no ponto B. Para isso foi utilizada a Equação 1. Tanto os dados utilizados nas simulações (comprimentos, momento de inércia da seção transversal, deslocamentos medidos e cargas aplicadas), quanto os valores

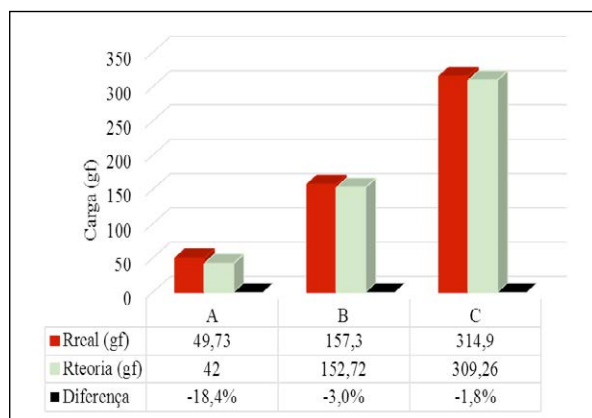
obtidos dos módulos de elasticidade encontram-se indicados na Tabela 1, onde é possível observar que para os diferentes casos de carregamento se obteve valores similares de E , tal como esperado para uma estrutura com comportamento linear. O valor médio do módulo de elasticidade da viga metálica (régua) utilizada no modelo foi de $1,2726 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.

Tabela 1 – Tabela com os resultados de módulo de elasticidade da primeira medição (E).

| Caso | E (kgf) | a (cm) | b (cm) | I (10^{-5} cm^4) | y (cm) | E (10^6 kgf/cm^2) |
|--------------------|--------------|-------------|-------------|-----------------------------------|-------------|------------------------------------|
| Carga em B | 0,2425 | 25 | 25 | 2,815 | 0,80 | 1,2734 |
| Carga em B | 0,2438 | 25 | 25 | 2,815 | 0,80 | 1,2802 |
| Carga em B | 0,2347 | 25 | 25 | 2,815 | 0,77 | 1,2805 |
| Carga em B | 0,4785 | 25 | 25 | 2,815 | 1,60 | 1,2563 |
| $E_{\text{médio}}$ | | | | | | 1,2726 |

Na Figura 10 estão comparados os resultados obtidos das reações de apoio real (R_{real}), por meio da mini-balança, e os obtidos teoricamente ($R_{\text{teórico}}$), a partir da Equação 3, para uma carga concentrada de 478,5 gf, aplicada individualmente em cada um dos três pontos de carga da viga, posições A, B e C (ver Figura 7).

Figura 10 – Gráfico com os resultados da primeira análise quantitativa do modelo. Aplicação de uma carga de 478,5 gf nas posições A, B e C da viga.



Conforme se pode observar na Figura 10, as diferenças entre os valores teóricos das reações de apoio e os medidos são significativas (até 18%), onde a causa disso foi identificada no engaste. Na Figura 2 se observa que as dimensões são medidas a partir da face direita do MDF de suporte do engaste, supondo que a barra estaria engastada nesse ponto, porém com uma análise mais criteriosa, se observou que a barra esta engastada mais próxima da fixação à face esquerda dessa placa de MDF, onde está fixado o suporte metálico do engaste (ver Figura 3).

Assim, foi necessário corrigir o valor do comprimento a (Figura 2). Para isso foi realizado um segundo teste aplicando uma carga de 245,2 gf no ponto B da viga, obtendo uma reação de apoio real de 80,7 gf. Com essa reação real, se realizou uma análise inversa para obter o valor efetivo do comprimento a com a Equação 3. Desse modo se obteve que o valor efetivo de a deveria ser de 25,51 cm, que é aproximadamente a distância entre o ponto B e a fixação dos parafusos no suporte do engaste.

Logo, foram realizados outros testes com a carga de 478,5 gf aplicada individualmente a cada um dos três pontos da viga (A, B e C), cujos resultados estão ilustrados na Figura 11. Nessa figura é possível observar que o erro máximo diminuiu de 18,42% para apenas 2%.

Com esses novos resultados o módulo de elasticidade da viga foi recalculado, conforme ilustrado na Tabela 2 onde se observa que o valor médio obtido para o módulo de elasticidade é de $1,4238 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$.

Figura 11 – Gráfico com os resultados da análise quantitativa do modelo após a correção do vão a .

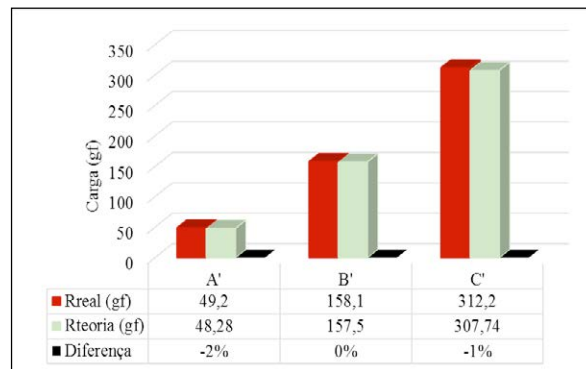
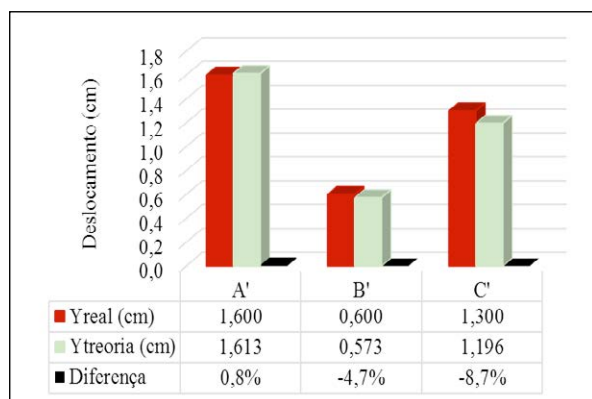


Tabela 2 – Resultados corrigidos do módulo de elasticidade para a situação da carga no ponto B da viga.

| P (kgf) | E (kgf) | a (cm) | b (cm) | I (10^{-5} cm ⁴) | y (cm) | E_c (10^6 kgf/cm ²) |
|-----------------------|-----------|----------|----------|-----------------------------------|----------|--------------------------------------|
| 0,2425 | 26,51 | 25 | 25 | 2,815 | 0,80 | 1,4247 |
| 0,2438 | 26,51 | 25 | 25 | 2,815 | 0,80 | 1,4323 |
| 0,2347 | 26,51 | 25 | 25 | 2,815 | 0,77 | 1,4326 |
| 0,4785 | 26,51 | 25 | 25 | 2,815 | 1,60 | 1,4056 |
| $E_{c, \text{média}}$ | | | | | | 1,4238 |

Na Figura 12 são apresentados os valores dos deslocamentos verticais medidos e calculados na viga para as três situações de carregamento, onde se observa a boa correlação entre eles. A diferença percentual máxima obtida nos deslocamentos foi de 8,73%.

Figura 12 – Comparação dos deslocamentos verticais teóricos e medidos no modelo após a correção do vão a .



As diferenças entre os deslocamentos calculados e medidos podem ser decorrentes de vários fatores, tais como: a dificuldade de se medir visualmente variações nos deslocamentos menores de 0,5 mm; do critério de medição do operador, que pode variar de pessoa para pessoa; e do fato de que as vinculações e a barra que forma a viga, embora funcionem de forma muito próxima da ideal, não são perfeitas,

podendo ocorrer pequenas variações entre o teórico e o experimental.

4 Considerações finais

Foi desenvolvido um modelo reduzido didático, qualitativo e quantitativo, de uma viga hiperestática (engastada-apoiada), que permite a medida dos deslocamentos ao longo da mesma e a reação do apoio rotulado por meio de uma mini-balança eletrônica (digital).

Tanto como a reação de apoio, como os deslocamentos verticais obtidos analiticamente, apresentaram boa correlação com os medidos, o que torna o modelo muito útil no ensino de disciplinas da área de estrutura em cursos de Engenharia

O modelo desenvolvido neste trabalho oferece uma ferramenta didática com grande potencial para facilitar o processo de aprendizagem dos conceitos e métodos de cálculo utilizados no estudo de estruturas hiperestáticas.

Após o ajuste do modelo com a teoria, os valores obtidos para a reação vertical no apoio apresentaram variação máxima de 2% entre os valores mensurados e teóricos, demonstrando que é possível a construção de estruturas reais em escala reduzida, estudadas na disciplina de Resistência dos Materiais e Análise de Estruturas que reproduzam o comportamento teórico esperado.

Assim, como este projeto poderá auxiliar a didática em salas de aula, outros modelos reduzidos poderiam ser desenvolvidos a fim de demonstrar a aplicação prática dos assuntos abordados nas disciplinas na área do comportamento estrutural.

REFERÊNCIAS

- ANASTASIOU, L. G. C.; ALVES, L. P. **Processos de ensinagem na universidade: pressupostos para as estratégias de trabalho em sala**. Joinville: Ed Univille, 2012.
- CARBONARI, G. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Centro de Tecnologia e Urbanismo. **Fabricação de um modelo qualitativo e quantitativo que permite determinar a carga crítica de flambagem de barra birrotulada, bi-engastada, rotulada-engastada e engastada-livre**. 2013-2015. Projeto de pesquisa em ensino nº 510.

CARBONARI, G.; CAMPOS, A. UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Centro de Tecnologia e Urbanismo. **Fabricação de modelos reduzidos (vigas, treliças, pórticos, arcos, barragens entre outros), qualitativos e quantitativos, para auxiliarem no ensino nas disciplinas da área de estruturas.** 2015-2019. Projeto de pesquisa em ensino n° 630.

PRAVIA, Z. M. C.; ORLANDO, D. Modelos qualitativos de treliças planas: construção e aplicação no ensino da análise e comportamento estrutural. In: Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia (Cobenge 2001). **Anais.** Porto Alegre, 2001.

AGRADECIMENTOS

A Prograd/UEL pela formalização do projeto de pesquisa em ensino. Aos discentes co-autores deste trabalho pela grande ajuda na elaboração e construção do modelo.